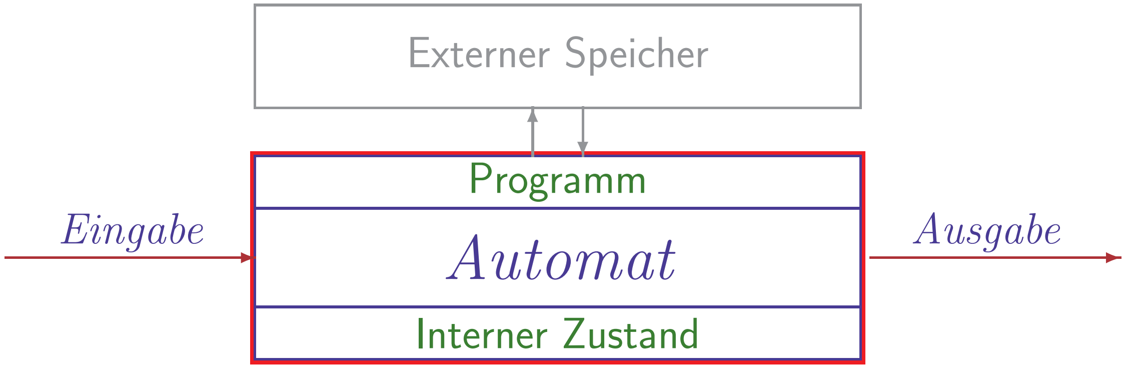
Theoretische Informatik I

Einheit 2

Endliche Automaten
&
Reguläre Sprachen

1. Deterministische endliche Automaten
2. Nichtdeterministische Automaten
3. Reguläre Ausdrücke
4. Grammatiken
5. Eigenschaften regulärer Sprachen

Automaten: das einfachste Maschinenmodell



Sichtweisen von Computern

- **Automaten stehen im Kern jeder Berechnung**
  - Schnelle, direkte Verarbeitung von Eingaben
  - Keine interne Speicherung von Daten
  - Speicher sind Teil der Umgebung
- **Endliche Automaten sind leicht zu analysieren**
  - Jede Berechnung endet nach einer festen Anzahl von Schritten
  - Keine Schleifen oder Seiteneffekte

Verwendungszwecke für endliche Automaten

Basismodell für viele Arten von Hard- & Software

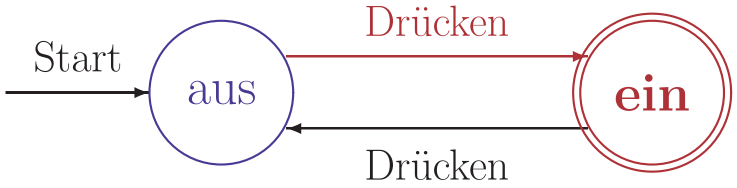
- **Steuerungsautomaten**
  - Alle Formen rein Hardware-gesteuerter automatischer Maschinen
    Waschmaschinen, Autos, Unterhaltungselektronik, Ampelanlagen, Computerprozessoren
- **Entwurf und Überprüfung digitaler Schaltungen**
  - Entwicklungswerkzeuge und Testsoftware beschreiben endliches Verhalten
- **Lexikalische Analyse in Compilern**
  - Schnelle Identifizierung von Bezeichnern, Schlüsselwörtern, ...
- **Textsuche in umfangreichen Dokumenten**
  - Z.B. Suche nach Webseiten mithilfe von Schlüsselwörtern
- **Software mit endlichen Alternativen**
  - Kommunikationsprotokolle, Protokolle zum sicheren Datenaustausch ...

Automaten beschreiben Sprachen

- **Generierte Sprache**
  - Menge aller möglichen Ausgaben des Automaten
- **Erkannte Sprache**
  - Menge aller Eingaben, die zur Ausgabe “ja” führen
  - Alternativ: letzter Zustand des Automaten muß ein “Endzustand” sein
- **Sprachen endlicher Automaten sind einfach**
  - Nur sehr einfach strukturierte Sprachen können beschrieben werden
  - Durch endliche Automaten beschreibbare Sprachen heißen **regulär**

Modelle zur Beschreibung regulärer Sprachen

- **Automaten: erkennen von Wörtern**
  - z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von “Drück”-Eingaben



  - Zustände: aus, ein – Startzustand: aus – Endzustand: ein
  - Eingabesymbol: Drücken
  - Endzustand wird erreicht bei ungerader Anzahl von Drücken
- **Mathematische Mengennotation**
  - z.B.: $\{\text{Drücken}^{2i+1} | i \in \mathbb{N}\}$ oder $\{w \in \{\text{Drücken}\}^* |\ \exists i \in \mathbb{N}. |w| = 2i+1\}$
- **Reguläre Ausdrücke: algebraische Strukturen**
  - z.B.: $(\text{DrückenDrücken})^*\text{Drücken}$
- **Grammatiken: Vorschriften für Spracherzeugung**
  - z.B.: $S \rightarrow \text{Drücken}$, $S \rightarrow S\text{DrückenDrücken}$
  - Erzeugt nur ungerade Anzahl von Drücken-Symbolen

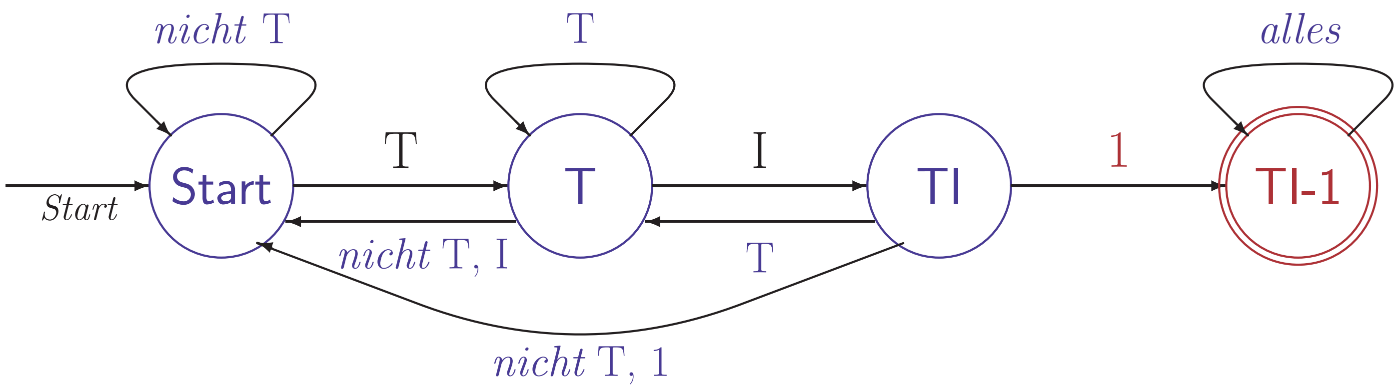
Theoretische Informatik I

Einheit 2.1

Deterministische Endliche Automaten

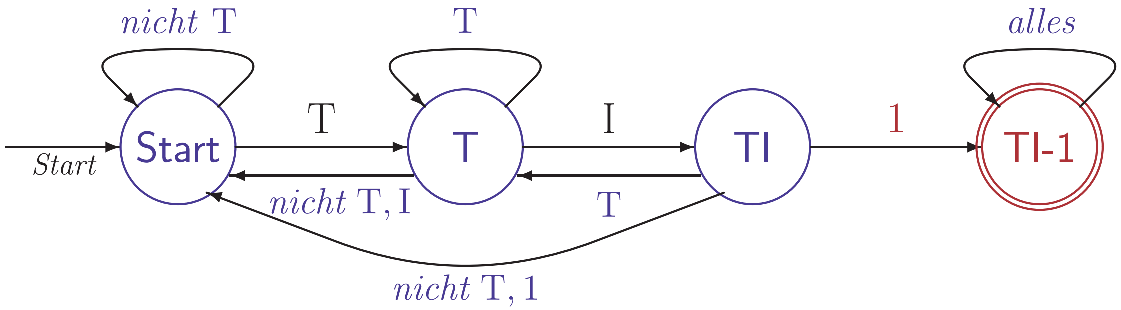
1. Arbeitsweise
2. Akzeptierte Sprache
3. Entwurf und Analyse
4. Automaten mit Ausgabe

Erkennung von Wörtern mit Automaten



- **Endliche Anzahl von Zuständen**
- **Ein Startzustand**
- **Regeln für Zustandsübergänge**
- **Eingabealphabet**: $\{A, .., Z, a, .., z, \ \ , ?, !, ..\}$
- **Ein oder mehrere akzeptierende Endzustände**

Endliche Automaten – mathematisch präzisiert



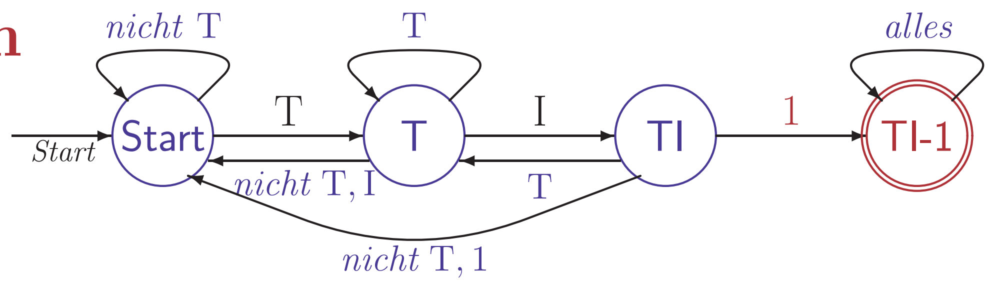
Ein **Deterministischer Endlicher Automat** (**DEA**)

ist ein 5-Tupel $\boldsymbol{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ (endliches) **Eingabealphabet**
- $\delta{:}Q\times\Sigma \to Q$ **Zustandsüberführungsfunktion**
- $q_0 \in Q$ **Startzustand** (Anfangszustand)
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden Zuständen** (Endzustände) (Finale Zustände)

Beschreibung von Endlichen Automaten

- **Übergangsdiagramm**

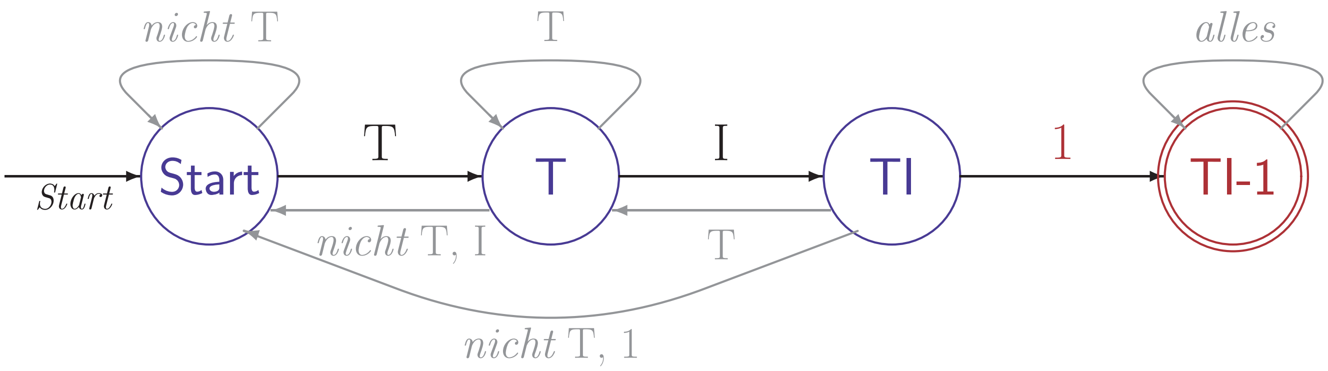


  – Jeder Zustand in Q wird durch einen Knoten (Kreise) dargestellt
  – Ist $\delta(q,a)=p$, so verläuft eine Kante von q nach p mit Beschriftung a (mehrere Beschriftungen derselben Kante möglich)
  – q_0 wird durch einen mit *Start* beschrifteten Pfeil angezeigt
  – Endzustände in F werden durch doppelte Kreise gekennzeichnet
  – Σ meist implizit durch Diagramm bestimmt

- **Übergangstabelle**
  – Tabellarische Darstellung der Funktion δ
  – Kennzeichnung von q_0 durch einen Pfeil
  – Kennzeichnung von F durch Sterne
  – Σ und Q meist implizit durch Tabelle bestimmt

		T	*I*	*1*	*sonst*
$\rightarrow$	S	T	S	S	S
	T	T	I	S	S
	I	T	S	1	S
*	1	1	1	1	1

Arbeitsweise von Endlichen Automaten



- **Anfangssituation**
  – Automat befindet sich im Startzustand q_0
- **Arbeitschritt**
  – Im Zustand q lese Eingabesymbol a,
  – Bestimme $\delta(q,a)=p$ und wechsele in neuen Zustand p
- **Terminierung**
  – Eingabewort $w = a_1..a_n$ ist komplett gelesen, Automat im Zustand q_n
- **Ergebnis**
  – Eingabewort w wird akzeptiert, wenn $q_n \in F$, sonst wird w abgewiesen

Arbeitsweise von DEAs – mathematisch präzisiert

- **Erweiterte Überführungsfunktion $\hat{\delta} : Q\times\Sigma^*\to Q$**
  - Schrittweise Abarbeitung der Eingabe mit δ von links nach rechts
  - Informal: $\hat{\delta}(q, w_1w_2...w_n) = \delta(...(\delta(\delta(q, w_1),w_2),...),w_n)$
  - Mathematisch präzise Beschreibung benötigt induktive Definition

$$\hat{\delta}(q,w) = \begin{cases} q & \text{falls } w{=}\epsilon, \\ \delta(\hat{\delta}(q,v),a) & \text{falls } w{=}v\,a \;\text{ für ein } v\in\Sigma^*,\ a\in\Sigma \end{cases}$$

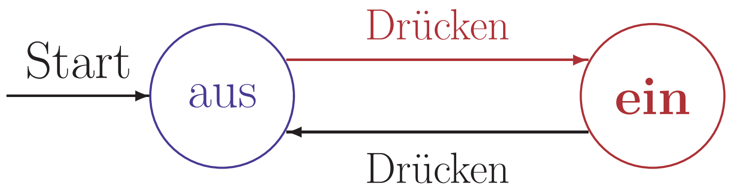
- **Von A akzeptierte Sprache**
  - Menge der Eingabewörter w, für die $\hat{\delta}(q_0, w)$ akzeptierender Zustand ist

$$L(A) = \{w\in\Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0,w)\in F\}$$

  - Auch: die von A erkannte Sprache

- **Reguläre Sprache**
  - Sprache, die von einem DEA A akzeptiert wird

Analyse der Sprache des Wechselschalters



- **Zeige: Automat A ist ein Wechselschalter**

  $S_1(n)$: Ist n gerade, so ist A nach n-fachem Drücken ausgeschaltet

  $S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist A nach n-fachem Drücken eingeschaltet

  Beweis durch simultane Induktion:

  Induktionsanfang $n{=}0$: n ist gerade also gilt $S_2(0)$

  A ist ausgeschaltet, also gilt $S_1(0)$

  Induktionsschritt: Es gelte $S_1(n)$ und $S_2(n)$. Betrachte $n{+}1$

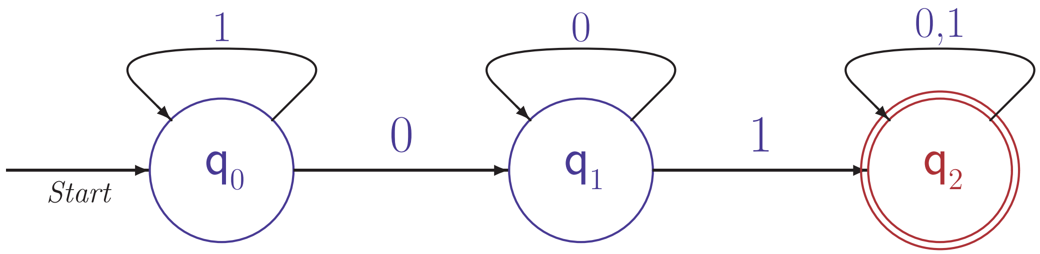
  – Falls $n{+}1$ ungerade, dann gilt $S_1(n{+}1)$ und n ist gerade.
  Wegen $S_1(n)$ war A "aus" und wechselt auf "ein". Es gilt $S_2(n{+}1)$

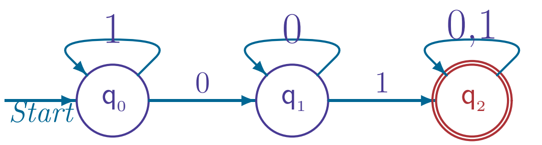
  – Falls $n{+}1$ gerade, dann gilt $S_2(n{+}1)$ und n ist ungerade.
  Wegen $S_2(n)$ war A "ein" und wechselt auf "aus". Es gilt $S_1(n{+}1)$

- **Es folgt: $L(A) = \{\text{Drücken}^{2i+1} | i \in \mathbb{N}\}$**

Entwerfe Automaten für $L = \{u01v \mid u, v \in \{0,1\}^*\}$

- **Drei Zustände sind erforderlich**
  - Zustand q_0: A hat noch keine 0 gelesen — 1^i bleibt in q_0
  - Zustand q_1: A hat eine 0 aber noch keine 1 gelesen — $1^i 0^{j+1}$ bleibt in q_1
  - Zustand q_2: A hat eine Zeichenkette 01 gelesen — $1^i 0^j 01 v$ bleibt in q_2
- **Zustandsübergänge erhalten "Bedeutung"**
  - Zustand q_0: Mit 1 bleibe in q_0, sonst wechsele nach q_1
  - Zustand q_1: Mit 0 bleibe in q_1, sonst wechsele nach q_2
  - Zustand q_2: Bleibe bei jeder Eingabe in q_2, Endzustand
- **Zugehöriger DEA mit Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$**





ZEIGE $L(A) = L = \{u01v \mid u, v \in \{0,1\}^*\}$

- **Zeige durch strukturelle Induktion über w:**
  - $\boldsymbol{\hat\delta(q_0, w) = q_0 \quad\Leftrightarrow\quad}$ **es gibt ein** $\boldsymbol{i \in \mathbb{N}}$ **mit** $\boldsymbol{w = 1^i}$

    Basisfall $w = \epsilon$: Per Definition ist $\hat\delta(q_0, \epsilon) = q_0$ und $w = 1^i$ für $i = 0$ $\surd$

    Schrittfall $w = ua$ für ein $u \in \Sigma^*, a \in \Sigma$:

    · Es gelte $\hat\delta(q_0, w) = q_0$. Dann ist $\hat\delta(q_0, u) = q_0$ und $\delta(q_0, a) = q_0$.
    Es folgt $a = 1$ und per Annahme $u = 1^i$ für ein i, also $w = 1^{i+1}$. $\surd$

    · Es gelte $w = 1^i$. Dann ist $a = 1$ und $u = 1^{i-1}$. Mit der Induktionsannahme folgt $\hat\delta(q_0, w) = \delta(\hat\delta(q_0, u), a) = \delta(q_0, a) = q_0$ $\surd$
  - $\boldsymbol{\hat\delta(q_0, w) = q_1 \quad\Leftrightarrow\quad}$ **es gibt** $\boldsymbol{i, j \in \mathbb{N}}$ **mit** $\boldsymbol{w = 1^i 0^{j+1}}$ $\boxed{\text{analog}}$
  - $\boldsymbol{\hat\delta(q_0, w) = q_2 \quad\Leftrightarrow\quad}$ **es gibt** $\boldsymbol{i, j \in \mathbb{N},\ v \in \Sigma^*}$ **mit** $\boldsymbol{w = 1^i 0^{j+1} 1 v}$
- **Zeige:** $\boldsymbol{w \in L \quad\Leftrightarrow\quad}$ **es gibt** $\boldsymbol{i, j \in \mathbb{N},\ v \in \Sigma^*}$ **mit** $\boldsymbol{w = 1^i 0^j 01 v}$

  $\Rightarrow$ Für $w \in L$ gibt es $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = u01v$
  Wenn u nicht die Form $1^i 0^j$ hat, dann folgt in u eine 1 auf eine 0.
  Das erste solche Vorkommen von 01 liefert die gewünschte Zerlegung $\surd$
- **Es folgt** $\boldsymbol{w \in L \quad\Leftrightarrow\quad \hat\delta(q_0, w) = q_2 \in F \quad\Leftrightarrow\quad w \in L(A)}$

Eine alternative Beschreibung der Arbeitsweise von DEAs

- **Konfiguration: 'Gesamtzustand' von Automaten**
  – Mehr als $q \in Q$: auch die noch unverarbeitete Eingabe zählt
  – Formal dargestellt als Tupel $\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{q},\boldsymbol{w}) \in Q\times\Sigma^*$
- **Konfigurationsübergangsrelation $\vdash^*$**
  – Wechsel zwischen Konfigurationen durch Abarbeitung von Wörtern
  – $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{aw}) \vdash (\boldsymbol{p},\boldsymbol{w})$, falls $\delta(q,a) = p$
  – $\boldsymbol{K_1} \vdash^* \boldsymbol{K_2}$, falls $K_1 = K_2$ oder
  es gibt eine Konfiguration K mit $K_1 \vdash K$ und $K \vdash^* K_2$
- **Akzeptierte Sprache**
  – Menge der Eingaben, für die $\vdash^*$ zu akzeptierendem Zustand führt

$$\boldsymbol{L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F.\ (q_0, w) \vdash^* (p,\epsilon)\}}$$

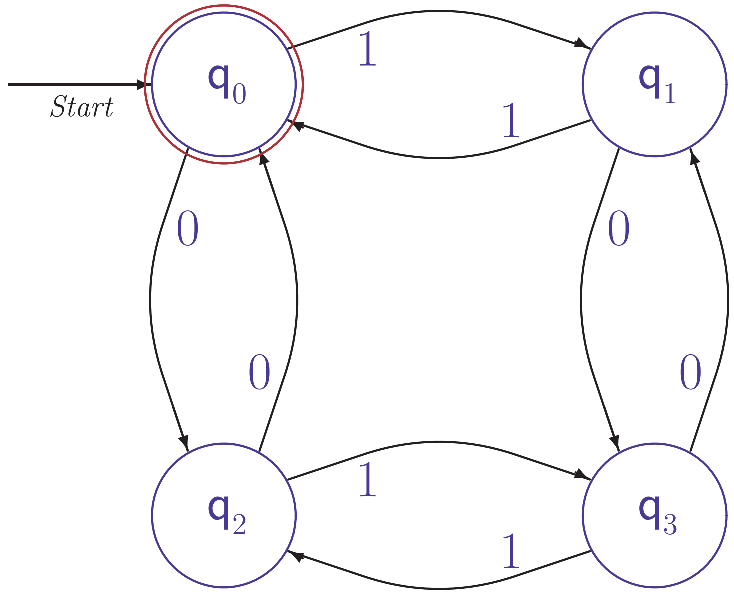
Für DEAs weniger intuitiv, aber leichter zu verallgemeinern

DEA FÜR $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ enthält gerade Anzahl von 0 und 1$\}$

Codiere Anzahl der gelesener 0/1 im Zustand

$q_0 \hat{=}$ (gerade,gerade) $\quad q_1 \hat{=}$ (gerade,ungerade)

$q_2 \hat{=}$ (ungerade,gerade) $\quad q_3 \hat{=}$ (ungerade,ungerade)



Korrektheit: gegenseitige strukturelle Induktion

Korrektheitsbeweis mit Konfigurationen

- **Zeige simultan für alle Wörter $w, v \in \{0,1\}^*$:**

  (1) $(q_0, w\,v) \vdash^* (q_0, v) \quad\Leftrightarrow\quad$ es gilt $g_0(w)$ und $g_1(w)$

  (2) $(q_0, w\,v) \vdash^* (q_1, v) \quad\Leftrightarrow\quad$ es gilt $g_0(w)$ und $u_1(w)$

  (3) $(q_0, w\,v) \vdash^* (q_2, v) \quad\Leftrightarrow\quad$ es gilt $u_0(w)$ und $g_1(w)$

  (4) $(q_0, w\,v) \vdash^* (q_3, v) \quad\Leftrightarrow\quad$ es gilt $u_0(w)$ und $u_1(w)$

  $g_0(w) \mathrel{\hat=} w$ hat gerade Anzahl von Nullen, $u_0(w) \mathrel{\hat=} w$ hat ungerade Anzahl von Nullen, ...

- **Basisfall $w = \epsilon$:**

  – Per Definition gilt $(q_0, v) \vdash^* (q_0, v)$ und $g_0(w)$ und $g_1(w)$ $\surd$

- **Schrittfall $w = ua$ für ein $u \in \Sigma^*, a \in \Sigma$:**

  (1) Es gelte $(q_0, w\,v) \vdash^* (q_0, v)$.

  Dann gilt $(q_0, u\,a\,v) \vdash^* (p, a\,v) \vdash (q_0, v)$ für einen Zustand p.

  Falls $a = 0$, dann ist $p = q_2$ und nach (3) folgt $u_0(u)$ und $g_1(u)$.

  Für $w = ua$ folgt somit $g_0(w)$ und $g_1(w)$. $\surd$

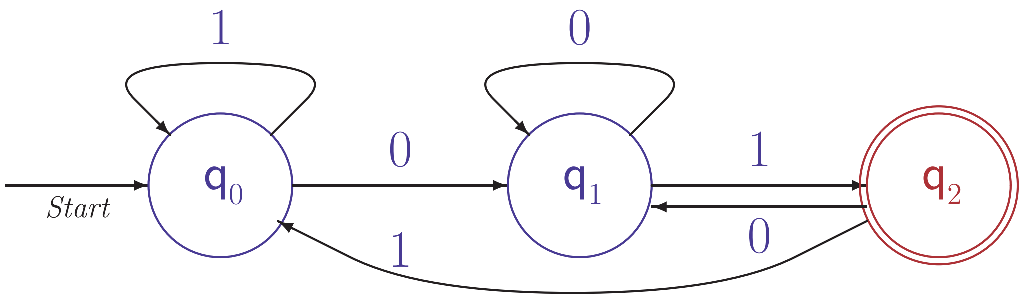
  Fall $a{=}1$ analog. Gegenrichtung durch Umkehrung des Arguments. (2), (3), (4) analog.

- **Es folgt** $w \in L(A) \;\Leftrightarrow\; (q_0, w) \vdash^* (q_0, \epsilon)$

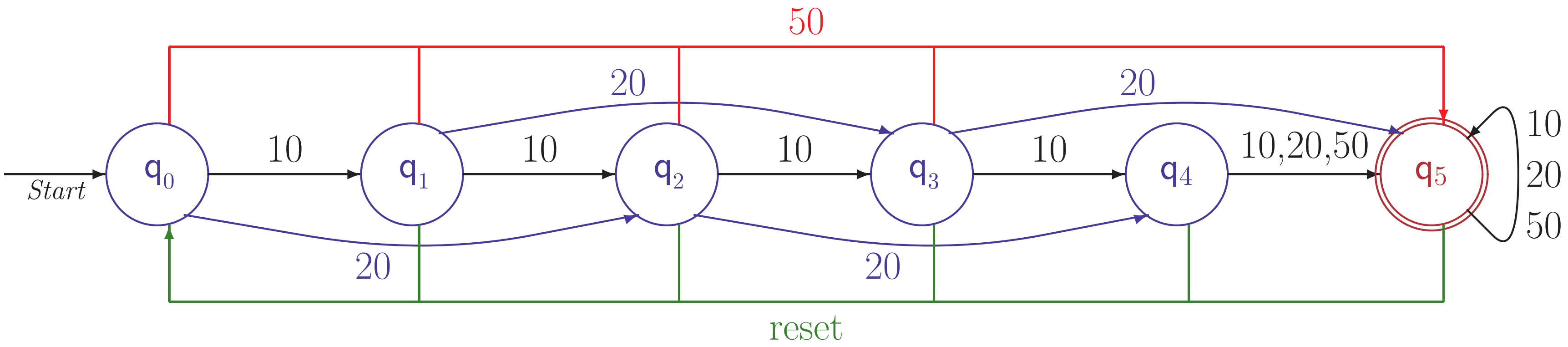
  $\Leftrightarrow\; g_0(w)$ und $g_1(w) \;\Leftrightarrow\; w \in L$

Weitere Beispiele endlicher Automaten

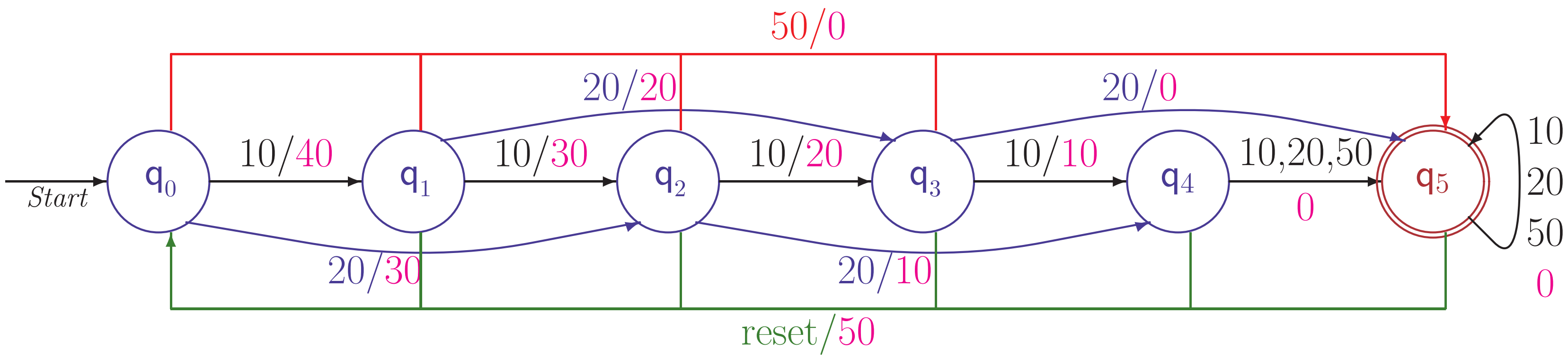
- **Erkenne Strings, die mit `01` enden**



- **50c Kaffeeautomat**
  – Akzeptiert 10,20,50c Münzen, gibt kein Geld zurück, mit Reset-Taste



- **50c Kaffeeautomat mit Restbetragsanzeige**

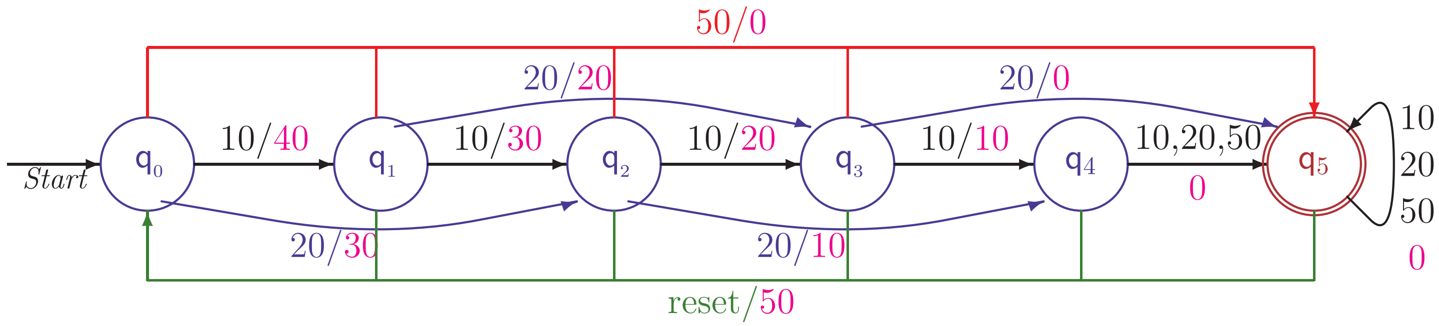


  – Münzeinwurf führt zu Zustandsänderung und erzeugt Ausgabe

- **Formalisierungen von Automaten mit Ausgabe**
  – Mealy-Automaten: Ausgabefunktion abhängig von Eingabe & Zustand
  – Moore-Automaten: Ausgabefunktion nur von Zustand abhängig

  Beide Modelle sind äquivalent

Mealy-Automaten – mathematisch präzisiert



Ein **Mealy-Automat** ist ein 6-Tupel

$\boldsymbol{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ (endliches) **Eingabealphabet**
- Δ (endliches) **Ausgabealphabet**
- $\delta{:}Q\times\Sigma \to Q$ **Zustandsüberführungsfunktion**
- $\lambda{:}Q\times\Sigma \to \Delta$ **Ausgabefunktion**
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**

Arbeitsweise von Mealy-Automaten analog zu DEAs

- **Anfangssituation:** Automat im Startzustand q_0
- **Arbeitschritt**
  - Im Zustand q lese Eingabesymbol a,
  - Bestimme $\delta(q,a)=p$ und wechsele in neuen Zustand p
  - Bestimme $x = \lambda(q,a)$ und gebe dieses Symbol aus
- **Terminierung:** Eingabewort $w = a_1..a_n$ ist komplett gelesen
- **Ausgabewort:** Verkettung der ausgegebenen Symbole $x_1..x_n$

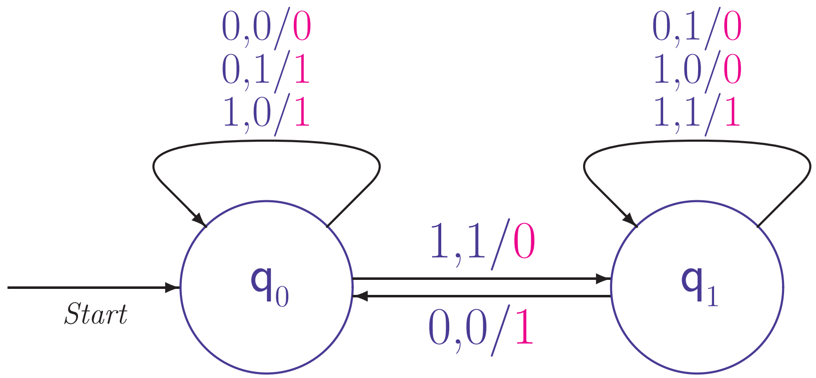
- **Erweiterte Ausgabefunktion $\hat{\lambda} : Q\times\Sigma^*\to\Delta^*$**
  - Schrittweise Erzeugung der Ausgabe mit Abarbeitung der Eingabe
  - Formal: Induktive Definition

$$\hat{\lambda}(q,w) = \begin{cases} \epsilon & \text{falls } w{=}\epsilon, \\ \hat{\lambda}(q,v)\circ\lambda(\hat{\delta}(q,v),a) & \text{falls } w{=}v\,a \text{ für ein } a\in\Sigma \end{cases}$$

- **Von M berechnete Funktion: $f_M(w) = \hat{\lambda}(q_0,w)$**

Mealy-Automat für (inverse) Binäraddition

- **Addition von Bitpaaren von rechts nach links**
  - Eingabealphabet $\Sigma = \{0,1\}\times\{0,1\}$
  - Ausgabealphabet $\Delta = \{0,1\}$
- **Zwei Zustände sind erforderlich**
  - Zustand q_0: A kann Addition zweier Bits direkt ausführen
  - Zustand q_1: A hat bei Addition einen Übertrag zu berücksichtigen
- **Zugehöriger Mealy-Automat**



Mealy-Automaten sind äquivalent zu DEAs

Gegenseitige Simulation ist möglich

- **Jede Funktion f ist als Menge beschreibbar**
  - **graph(f)** $= \{(w,v) \mid f(w) = v\}$
  - **graph*(f)** $= \{(w_1,v_1)..(w_n,v_n) \mid f(w_1..w_n) = v_1..v_n\}$
  - DEAs können Graphen berechneter Funktionen akzeptieren

  Satz: **f Mealy-berechenbar $\Leftrightarrow$ graph*(f) reguläre Sprache**

- **Jede Sprache L ist als Funktion beschreibbar**
  - $\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ charakteristische Funktion von L
  - Charakteristische Funktionen akzeptierter Sprachen sind berechenbar

  Satz: **L regulär $\Leftrightarrow$ χ_L "Mealy-berechenbar"**

Beweis der Äquivalenz (Skizze)

- **f Mealy-berechenbar $\Leftrightarrow$ graph*(f) regulär**
  – Zu $M = (Q,\Sigma,\Delta,\delta,\lambda,q_0)$ konstruiere $A = (Q\cup\{q_f\}, \Sigma\times\Delta, \delta', q_0, Q)$

  mit $\delta'(q,(a,b)) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{falls } \lambda(q,a)=b, \\ q_f & \text{sonst} \end{cases}$

  – Dann $f_M(w_1..w_n) = v_1..v_n$ genau dann, wenn $(w_1,v_1)..(w_n,v_n) \in L(A)$

- **L regulär $\Leftrightarrow$ χ_L "Mealy-berechenbar"**
  – Zu $A = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ konstruiere $M = (Q,\Sigma,\{0,1\},\delta,\lambda,q_0)$

  mit $\lambda(q,a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \delta(q,a)\in F, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

  – Dann ist $w\in L(A)$ genau dann, wenn $f_M(w) = v1$ für ein $v\in\{0,1\}^*$

  $\chi_L(w)$ ist das letzte Ausgabesymbol von $f_M(w)$

Mehr zu Automaten mit Ausgabe im Buch von Vossen & Witt