Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, WS 2008/09

Blatt 6 (Version 1) — Abgabetermin: 08.12.2008, 12:30 Uhr

Vorbereitung auf die nächste Vorlesung: Vertiefen Sie das Thema “Eigenschaften regulärer Sprachen”. Verwenden Sie hierzu z.B. die Vorlesungsfolien der Einheit 2.5, die Kapitel 4.1-4.4. des Buches von Hopcroft, Motwani und Ullman, eines der empfohlenen Bücher oder das Internet.

Aufgabe 6.1 (Homomorphismen)

Sei $h' : \{0,1,2\} \to \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*$ eine Abbildung mit $h'(0) = \mathtt{a}$, $h'(1) = \mathtt{ab}$ und $h'(2) = \mathtt{ba}$.

1. Definieren Sie mit Hilfe von h' einen Homomorphismus $h : \{0,1,2\}^* \to \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*$.
   Warum ist h durch h' bereits eindeutig bestimmt?
   Berechnen Sie $h(21120)$.
2. Geben Sie $h(L_i)$ für die Sprachen $L_1 = L(01^*2)$ und $L_2 = L(0+12)$ an.
3. Geben Sie $h^{-1}(L_i)$ für die Sprachen $L_1 = \{\mathtt{ababa}\}$ und $L_2 = L(\mathtt{a}(\mathtt{ba})^*)$ an.

Aufgabe 6.2 (Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen)

Zeigen Sie, dass die regulären Sprachen bezüglich der folgenden Operationen abgeschlossen sind:

1. $min(L) := \{w \mid w \in L$ und kein echter Präfix von w ist in L enthalten $\}$.
2. $max(L) := \{w \mid w \in L$ und für alle Wörter $x \neq \varepsilon$ gilt $wx \notin L\}$.
3. $init(L) := \{w \mid$ für ein Wort $x \neq \varepsilon$ gilt $wx \in L\}$.
4. $quot(a, L) := \{w \mid aw \in L\}$ für ein Symbol a.

Tipp: Beginnen Sie mit einem DEA für die Sprache L und konstruieren Sie daraus einen Automaten für die gewünschte Sprache.

Aufgabe 6.3 (Nichtreguläre Sprachen)

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Die Vereinigung unendlich vieler regulärer Sprachen ist wieder eine reguläre Sprache.
2. Der Durchschnitt unendlich vieler regulärer Sprachen ist nicht unbedingt eine reguläre Sprache.
3. Die Differenz $L_1 - L_2 - L_3 - \ldots$ abzählbar unendlich vieler regulärer Sprachen L_i ist regulär.

Hinweis: Verwenden Sie für Widerlegungen, daß die Sprache $L_{ab} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 6.4 (Etwas zum Nachdenken: warum macht Hüllenbildung regulär?)

1. Die Sprache $L_p = \{0^i \mid i$ ist Primzahl$\}$ ist nicht regulär. Erklären Sie, warum L_p^* dennoch regulär ist.
2. Geben Sie eine allgemeine Charakterisierung der regulären Sprachen über dem Alphabet $\{0\}$ an.
3. Überlegen Sie sich, wie man diese Erkenntnisse dazu verwenden könnte, um zu zeigen, daß die Kleene’sche Hülle L^* jeder *beliebigen* Sprache L über einem einelementigem Alphabet regulär ist.

Hausaufgabe 6.5 (Rechtslineare vs. linkslineare Grammatiken)

Für jede rechtslineare Grammatik $G = (V, T, P, S)$ gibt es eine äquivalente linkslineare Grammatik $G' = (V', T, P', S')$ mit $L(G) = L(G')$. Zeigen Sie, wie Sie G' aus G erzeugen können und begründen Sie die Korrektheit Ihrere Konstruktion. Ein ausführlicher Beweis ist nicht erforderlich.

Hausaufgabe 6.6 (Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen)

1. Für zwei Wörter gleicher Länge $u{=}a_1 \ldots a_n$ und $v{=}b_1 \ldots b_n$ sei $\mathrm{alt}(u, v) = a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n$. Zeigen Sie, daß die Sprache $\mathrm{alt}(L_1, L_2) = \{w \mid \exists u \in L_1. \exists v \in L_2. |u| {=} |v| \wedge w {=} \mathrm{alt}(u, v)\}$ regulär ist, wenn L_1 und L_2 regulär sind.
2. Der Quotient L_1/L_2 zweier Sprachen L_1 und L_2 sei definiert als $L_1/L_2 = \{w \mid \exists v \in L_2. wv \in L_1\}$. Beweisen Sie, daß L_1/L_2 eine reguläre Sprache ist, wenn L_1 eine reguläre Sprache ist und L_2 eine beliebige Menge.

Bonusaufgabe (2 Sonderpunkte) Zeigen Sie, daß reguläre Sprachen unter "Halbierung" abgeschlossen sind: Wenn eine Sprache L regulär ist, dann ist auch $L_{half} = \{x \mid \exists y \in \Sigma^*. |x| {=} |y| \wedge xy \in L\}$, die Menge der ersten Hälften von Wörtern aus L, regulär.

Diese Aufgabe wird im Buch von Sipser als schwer eingestuft. Eine Lösung ist uns vorerst nicht bekannt.

Hausaufgabe 6.7 (Nichtreguläre Sprachen)

Die Sprache $L_{ab} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär. Zeigen Sie unter Verwendung der Abschlusseigenschaften, dass die Sprache $L_{()} = \{w \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *, +, (,)\}^* \mid$ die Ausdrücke in w sind korrekt geklammert$\}$ ebenfalls nicht regulär ist!

Hinweis: Ein Wort $w \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *, +, (,)\}^*$ ist in $L_{()}$, wenn es zu jeder öffnenden Klammer genau eine schließende Klammer gibt und umgekehrt und die öffnenden Klammern vor den zugehörigen schließenden Klammern kommen. Ein Wort w gehört auch dann zur Sprache $L_{()}$, wenn die uns geläufige Syntax für $+$ und $*$ verletzt wird. So gehören die Wörter $(9*)(2)+$ und $(*)2 + 13(())4$ zur Sprache $L_{()}$, aber nicht die Wörter $)0 + 1($ oder $0 + (1 * 2($.