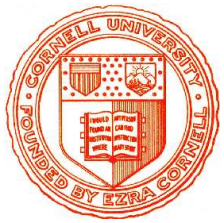
# Kryptographie und Komplexität

## Einheit 4.4




## Semantische Sicherheit

1. Sicherheit partieller Informationen
2. Das Verfahren von Rabin
3. Sicherheit durch Randomisierung

# Semantische Sicherheit

## Mehr als nur Sicherheit des Schlüssels

- **Vollständiger Bruch des Verfahrens**
  - Angreifer ist in der Lage, den geheimen Schlüssel zu bestimmen
  - Danach kann jede beliebige Nachricht vom Angreifer genauso effizient entschlüsselt werden wie vom vorgesehenen Empfänger
- **Partieller Bruch des Verfahrens**
  - Angreifer kann mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit Schlüsseltexte in akzeptabler Zeit dechiffrieren, ohne den Schlüssel kennen zu müssen
- **Extraktion von Teilinformationen**
  - Angreifer kann aus Schlüsseltext spezifische Teilinformationen über den Klartext extrahieren
  - Äquivalent zum Ziel, Chiffrierung eines Klartextes von der eines beliebigen Strings zu unterscheiden (mit Wahrscheinlichkeit über 50%)
  - Ein System ist semantisch sicher, wenn dies nicht möglich ist

# Extraktion partieller Informationen

- **Steckt Klartextinformation im Schlüsseltext?**
  - z.B.: *Ist Klartext $x$ eine gerade Zahl oder größer als $n/2$?*
  - Information über einzelne Klartextbits kann sehr wertvoll sein und z.B. Antworten auf wichtige Ja/Nein Entscheidungen liefern
- **Nicht jede Information kann geheim bleiben**
  - z.B. ändert RSA Verschlüsselung den Wert des Jacobi Symbols nicht
    Ist $y = x^e \bmod n$ so ist $(\frac{y}{n}) = (\frac{x^e}{n}) = (\frac{x}{n})^e = (\frac{x}{n})$, da $e$ ungerade ist
- **Extraktion von Teilinformation ist bei RSA genauso schwer wie partieller Bruch**
  - Das Problem der vollständigen Entschlüsselung von RSA ist reduzierbar auf die Berechnung von `parity` bzw `half` (Beweis folgt)
- **RSA Sicherheit gegen partiellen Bruch ungewiß**
  - Es gibt keinen Beweis, daß RSA genauso schwer wie Faktorisierung ist

# Extraktion partieller Information bei RSA

## Genauso schwer wie partieller Bruch

- **Breche Schlüsseltexte mit 'Orakel' `half`**
  - Sei $\texttt{half}(y) = \begin{cases} 1, & n{>}x{>}n/2 \\ 0, & x{<}n/2 \end{cases}$ und $\texttt{parity}(y) = \begin{cases} 1, & x \text{ ungerade} \\ 0, & x \text{ gerade} \end{cases}$ für $y = e_K(x)$
  - `half` und `parity` sind gleich schwer zu bestimmen

    $\texttt{half}(y)$ liefert das erste 'Bit' des Klartextes, $\texttt{parity}(y)$ das letzte
  - Wegen $(2x)^e \bmod n = 2^e{\cdot}x^e \bmod n$ liefert $\texttt{half}(2^e{\cdot}y)$ das zweite 'Bit', $\texttt{half}(2^{2e}{\cdot}y)$ das dritte, bis nach $\|n\|$ Iterationen der Klartext feststeht
- **Verfahren berechnet $x$ durch Binärsuche**
  - Setze $[l..r]$ := $[0..n]$
  - Für $i := 0..\|n\|$ setze $[l..r]$ := $[(l+r)/2..r]$, falls $\texttt{half}(2^{i\cdot e}{\cdot}y)$ = 1

    $[l..r]$ := $[l..(l+r)/2]$, falls $\texttt{half}(2^{i\cdot e}{\cdot}y)$ = 0
  - Ergebnis nach $\|n\|$ Schritten ist $x = \lfloor r \rfloor$

# Das Rabin Verschlüsselungsverfahren

## 'Sichere' Modifikation des RSA Verfahrens

- **Schlüsselerzeugung**
  - Wähle zwei großer Primzahlen $p$ und $q$, wobei $p, q \equiv 3 \bmod 4$
    (Zusatzbedingung nicht nötig, erleichtert Dechiffrierung)
  - Setze $n = p * q$ und lege $n$ offen, halte $p$ und $q$ geheim
- **Verschlüsselungsverfahren**
  - Jeder Textblock wird als Binärdarstellung einer Zahl $x$ interpretiert
  - Verschlüsselung wird Quadrieren modulo $n$: $\boldsymbol{e_K(x)} = x^2 \bmod n$
  - Entschlüsselung wird Quadratwurzel modulo $n$: $\boldsymbol{d_K(y)} = \sqrt{y} \bmod n$
    (Nichttriviale Operation, wenn $p, q$ nicht bekannt)
- **System nur von theoretischem Interesse**
  - Ein partieller Bruch des Systems ist genauso schwer wie Faktorisierung
  - Nach heutigem Stand der Technik semantisch sicher

# Entschlüsselung im Rabin Verfahren

- **Die Gleichung $x^2 \equiv y \bmod p{\cdot}q$ hat 4 Lösungen**
  - $y$ ist quadratischer Rest modulo $p$ und modulo $q$
  - Es folgt $y^{(p-1)/2} \equiv 1 \bmod p$ und $y^{(q-1)/2} \equiv 1 \bmod q$
  - Damit $(\pm y^{(p+1)/4})^2 = y^{(p+1)/2} \equiv y \bmod p$ (analog für $q$)
  - Wegen $p, q \equiv 3 \bmod 4$ sind $\pm y^{(p+1)/4}$ und $\pm y^{(q+1)/4}$ wohldefiniert
  - Nach dem chinesischen Restsatz hat jedes Paar von Kongruenzen
    $$x \equiv \pm y^{(p+1)/4} \bmod p \quad \text{und} \quad x \equiv \pm y^{(q+1)/4} \bmod q$$
    jeweils eine eindeutige Lösung modulo $n$
  - Verschlüsselung ist nicht injektiv
- **Bestimmung des Klartextes** $\mathcal{O}(\|n\|^3)$
  - Berechne $y_p := q^{-1} \bmod p$ und $y_q := p^{-1} \bmod q$ a priori
  - Berechne $x_i := \pm q{\cdot}y_p{\cdot}y^{(p+1)/4} \pm p{\cdot}y_q{\cdot}y^{(q+1)/4} \bmod n$
  - Wähle nach Übertragung in Text den besten der vier Kandidaten aus
    Bei großen Blöcken gibt es i.a. nur einen einzigen sinnvollen

Nichtdeterministische Dechiffrierung ist Basis für Sicherheit des Verfahrens

# Das Rabin Verfahren am Beispiel

- **Schlüsselerzeugung**
  - Wähle $p = 944123$ $q = 944147$
  - Dann ist $n = 891390898081$
  - Entschlüsselungskoeffizienten sind $y_p := p^{-1} \bmod q = 511400$
    und $y_q := q^{-1} \bmod p = 432734$
- **Verschlüsselung**
  - Alice verschlüsselt Klartext $x = 730581888230$
  - Ergebnis ist $y = x^2 \bmod n = 408240297532$
- **Entschlüsselung**
  - Bob berechnet $y^{(p+1)/4} \bmod p = 568209$, $y^{(q+1)/4} \bmod q = 576202$
  - Bob berechnet $\pm q{\cdot}y_p{\cdot}y^{(p+1)/4} \pm p{\cdot}y_q{\cdot}y^{(q+1)/4} \bmod n$ und erhält

    160809009851, 532577267684, 358813630397, 730581888230
  - Die letzte der vier Lösungskandidaten ist der Klartext

# Sicherheit des Rabin Verfahrens

**Berechnung des Klartextes $x$ aus $y = x^2 \bmod n$ ist genauso schwer wie die Faktorisierung von $n = p \cdot q$**

- **Faktorisierung liefert den Klartext**
  - Wenn Eve $n$ faktorisieren kann, dann hat sie alle Informationen, die im Rabin Verfahren zur Entschlüsselung erforderlich sind
- **Quadratwurzelberechnung liefert Faktorisierung**
  - Wähle $a \in \{1 \ldots n-1\}$ zufällig
  - Ist $g = gcd(a, n) \neq 1$ dann ist $g$ echter Teiler von $n$
  - Ansonsten berechne eine Quadratwurzel $z$ von $a^2 \bmod n$
  - Wenn $z \not\equiv \pm a \bmod n$ so ist $gcd(z-a, n)$ echter Teiler von $n$

Für $z$ gibt es vier Möglichkeiten

$$gcd(z-a, n) = \begin{cases} n & z \equiv a \bmod p \ \wedge \ z \equiv a \bmod q \\ p & z \equiv a \bmod p \ \wedge \ z \equiv -a \bmod q \\ q & z \equiv -a \bmod p \ \wedge \ z \equiv a \bmod q \\ 1 & z \equiv -a \bmod p \ \wedge \ z \equiv -a \bmod q \end{cases}$$

Da $a$ zufällig ist, wird ein Teiler mit Wahrscheinlichkeit 1/2 gefunden

Liefert **"$RP$" Algorithmus zur Faktorisierung von $n$**

# Sicherheit durch Randomisierung

- **Unterscheidbarkeit von Schlüsseltexten**
  - *Gegeben Verschlüsselungsfunktion $f$, zwei Klartexte $x_1, x_2$ und einen Schlüsseltext $y$ mit der Eigenschaft $y{=}f(x_i)$ für ein $i$. Bestimme $i$ mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit weniger als 50%*
  - Allgemeinste Form der Extraktion von Information aus Schlüsseltexten
  - Kann ein Angreifer Schlüsseltexte nicht in polynomieller Zeit unterscheiden, so kann er keinerlei Information über den Klartext aus einem Schlüsseltext extrahieren
  - Semantische Sicherheit $\hat{=}$ Nichtunterscheidbarkeit von Schlüsseltexten
- **Nichtunterscheidbarkeit braucht Randomisierung**
  - Wenn die Verschlüsselungsfunktion $f$ deterministisch ist, kann ein Angreifer $f(x_1)$ und $f(x_2)$ in polynomieller Zeit ausrechnen
  - Ein deterministisches Verfahren kann nicht semantisch sicher sein
  - Moderne Versionen von RSA ergänzen Zufallskomponenten

# Semantisch sichere Verschlüsselung

- **Randomisierung der Verschlüsselungsfunktion $f$**
  - Verschlüsselung: $(y_1, y_2) := e_K(x) = (f(r), G(r) \oplus x)$
  - Entschlüsselung: $d_K(y_1, y_2) := G(f^{-1}(y_1)) \oplus y_2$

    $r$ beliebige Zufallszahl

    $G$ 'zufallstreue' Expansionsfunktion (dargestellt als riesige Tabelle)

    $f$ Einwegfunktion (nicht in polynomieller Zeit umkehrbar)
- **Intuitive Begründung der Sicherheit**
  - Um Information über $x$ zu erhalten, braucht man Information zu $G(r)$
  - $G(r)$ kann nur berechnet werden, wenn $r$ vollständig bekannt ist

    Teile von $r$ reichen nicht aus, um Teile von $G(r)$ zu bestimmen
  - $r$ kann nur bestimmt werden, wenn $f^{-1}(y_1)$ vollständig berechnet wird

    $f^{-1}(y_1)$ kann nicht in polynomieller Zeit berechnet werden

Detaillierter Beweis siehe Stinson §5.9.2

# Semantisch sichere Version von RSA

- **Einfache Variante**
  - Verschlüsselung: $(y_1, y_2) := e_K(x) = (r^e \bmod n, G(r) \oplus x)$
  - Entschlüsselung: $d_K(y_1, y_2) := G(y_1^d \bmod n) \oplus y_2$
- **PKCS# Standard**
  - Verschlüsselung: $y := e_K(x) = ((x \oplus G(r)) \circ (r \oplus H(x \oplus G(r))))^e \bmod n$

    $r \in \{0,1\}^k$ beliebige Zufallszahl

    $G: \{0,1\}^k \to \{0,1\}^l$ Expansionsfunktion

    $H: \{0,1\}^l \to \{0,1\}^m$ Kompressionsfunktion

    Klartextlänge $\|x\| = l$, RSA Blocklänge $\|n\| = l+k+1$

    Klartext wird zu $y_1 = x \oplus G(r)$ randomisiert

    Zufallszahl wird zu $y_2 = r \oplus H(y_1)$ maskiert
  - Entschlüsselung: Berechne $y_1 \circ y_2 := y^d \bmod n$

    Bestimme $r = H(y_1) \oplus y_2$ und berechne $x = y_1 \oplus G(r)$

# RSA im Rückblick

- **Ältestes/bedeutendstes Public-Key Verfahren**
  - Ver-/Entschlüsselung ist Potenzieren mit $e$ bzw. $d$ modulo $n$
  - Rahmenbedingung $d = e^{-1} \bmod \varphi(n)$
  - $n$ zusammengesetzt aus zwei großen Primzahlen $p$ und $q$
  - $n, e$ liegt offen, $d$, $p$ und $q$ bleiben geheim
- **Schlüsselerzeugung benötigt Primzahltests**
  - Schnellste Verfahren sind probabilistisch (Miller-Rabin)
- **Sicherheit basiert auf Faktorisierungsproblem**
  - Schlüsselangriff äquivalent zu Lösung des Faktorisierungsproblems
  - Faktorisierung ist subexponentiell $\mathcal{O}(e^{1.92 \cdot \|n\|^{1/3} \cdot (\log(\|n\|))^{2/3}})$
  - Sicherheit nur noch für Schlüsselgröße über 1024 Bit
  - Semantische Sicherheit nur mithilfe von Randomisierung