Theoretische Informatik I

Wintersemester 2008/09

Christoph Kreitz
Theoretische Informatik
kreitz@cs.uni-potsdam.de
http://www.cs.uni-potsdam.de/ti/lehre/08-Theorie-I

1. Lehrziele und Lernformen
2. Organisatorisches
3. Gedanken zur Arbeitsethik

Theoretische Informatik: Worum geht es?

Die Wissenschaft von der Berechnung

- **Analyse von Grundsatzfragen**
  - Was kann man mit Computern lösen, was nicht?
  - Für welche Probleme gibt es gute, allgemeingültige Verfahren?
  - Welche Probleme sind effizient lösbar – welche nicht?
  - Wie flexibel kann man Programmiersprachen gestalten?
  - Wie hängen verschiedenartige Computerarchitekturen?
- **Mathematische Vorgehensweise**
  - Abstraktion von irrelevanten Details (Hardware/Programmiersprache)
  - Erkenntnisse sind beweisbar und haben weitreichende Gültigkeit
- **Der älteste Zweig der Informatik**
  - Theoretische Erkenntnisse gab es lange vor den ersten Computern
  - Aussagen sind langlebiger als in den anderen Informatikzweigen
  - Aber: Erkenntnisse sind selten "unmittelbar" anwendbar

Wozu soll das gut sein?

Denken ist besser als Hacken

- **Verständnis allgemeiner Zusammenhänge**
  - Details ändern sich schnell, Modelle und Methoden nicht
- **Effizientere Arbeitsweise**
  - Abstraktion richtet den Blick auf das Wesentliche
    Wenn Sie zu sehr auf Details schauen verlieren Sie die Übersicht
  - Abstrakte Lösungen sind schnell auf spezifische Situationen übertragbar
- **Vermeidung der gröbsten Fehler**
  - z.B. Korrektheit von Software kann nicht getestet werden
    Optimale Navigation ist nicht effizient möglich
    Flexible Programmierpsrachen sind nicht (effizient) compilierbar
  - Viele Programmierer haben sich schon in unlösbare Probleme verbissen, weil sie das nicht wußten oder nicht geglaubt haben

Konkrete Themen der Theoretischen Informatik

- **Automatentheorie und Formale Sprachen** TI-1
  - Endliche Automaten und Reguläre Sprachen – Lexikalische Analyse
  - Kontextfreie Sprachen und Pushdown Automaten – Syntaxanalyse
  - Turingmaschinen und allgemeine formale Sprachen
- **Theorie der Berechenbarkeit** TI-2
  - Berechenbarkeitsmodelle
  - Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Unlösbare Probleme
- **Komplexitätstheorie** TI-2
  - Komplexitätsmaße und -klassen für Algorithmen und Probleme
  - Nicht handhabbare Probleme ($\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)
  - Effiziente Alternativen zu konventionellen Verfahren

Der Lehrstoff

- **Reihenfolge und Notation folgt Leittext**
  - J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman: *Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie, Pearson 2002*
  - Vorlesungsfolien sind im Voraus auf dem Webserver erhältlich
  - Videomitschnitte der Vorlesung des letzten Jahres online verfügbar
- **Lesenswerte Zusatzliteratur**
  - G. Vossen, K.-U. Witt: *Grundkurs Theoretische Informatik. Vieweg 2004*
  - M. Sipser: *Introduction to the Theory of Computation. PWS 2005*
  - A. Asteroth, C. Baier: *Theoretische Informatik, Pearson 2002*
  - J. Hromkovic: *Sieben Wunder der Informatik, Teubner Verlag 2006* – I. Wegener: *Theoretische Informatik, Teubner Verlag 1993*
  - U. Schöning: *Theoretische Informatik - kurzgefaßt, Spektrum-Verlag 1994*
  - K. Erk, L. Priese: *Theoretische Informatik, Springer Verlag 2000*
  - H. Lewis, C. Papadimitriou: *Elements of the Theory of Computation, PHl 1998*
  - P. Leypold: *Schneller Studieren. Pearson 2005*

Lehr- und Lernformen

- **Selbststudium ist das wichtigste**
  - Lernen durch Bearbeitung verschiedener Quellen (Literatur, Web,...)
  - Trainieren durch Lösung von leichten und schweren Beispielaufgaben alleine und im Team mit anderen
  - Nachweis von Fähigkeiten in Prüfungen und Projekten
  - Ziel ist Verständnis eines Themengebiets (nicht nur der Vorlesung)
  - Unsere Aufgabe ist, Ihnen dabei zu helfen
- **Vorlesung** Was soll ich lernen ?
  - Vorstellung und Illustration zentraler Konzepte und Zusammenhänge
  - Knapp und "unvollständig" – nur als Heranführung gedacht
  - Die Idee (Verstehen) zählt mehr als das Detail (Aufschreiben)
  - Es hilft, schon etwas über das Thema im Voraus zu lesen
  - Stellen Sie Fragen, wenn Ihnen etwas unklar ist !!
  - Nutzen Sie das optionale Tutorium zweiwöchentlich Mi 15:40–16:40

Lehr- und Lernformen (II)

- **Übungen** — Vertiefung und Anwendung
  - Kurzquiz als Selbsttest – verstehe ich die bisher besprochenen Konzepte?
  - Betreutes Üben in Gruppen: Lösung von Problemen unter Anleitung
  - Klärung von Fragen allgemeinen Interesses
  - Eigenständige Einarbeitung in neue Konzepte und Fragestellungen
  - Bearbeitung von aufwändigeren Hausaufgaben: Feedback & Korrektur
    - Ziel ist verständliches Aufschreiben einer vollständigen Lösung
    - Arbeit in Gruppen sehr zu empfehlen
    - Lösungen schwieriger Aufgaben werden in Hörsaalübung besprochen
  - Selbst aktiv werden ist notwendig für erfolgreiches Lernen
  - Kommen Sie vorbereitet – Sie lernen mehr dabei
- **Sprechstunden** — Persönliche Beratung
  - Fachberatung zur Optimierung des individuellen Lernstils
  - Klärung von Schwierigkeiten mit der Thematik

    ... aber nicht Lösung der Hausaufgaben

Organisatorisches

- **Zielgruppe: ab 1. Semester**
  - Bei geringen mathematischen Vorkenntnissen besser ab dem 3. Semester
  - Oft ist es sinnvoller erst an Mathematikveranstaltungen teilzunehmen
- **Vorlesung** (TeleTask-Aufzeichnung der Vorjahre im Internet)
  - Wöchentlich Fr 11:00–12:30
- **Tutorium / Hörsaalübung** (optional)
  - Besprechung von allgemeinen Fragen und schwierigen Hausaufgaben
  - Wöchentlich Mi 15:40–16:40, ab 5. November
- **Übungen**
  - 7 Gruppen, wöchentlich (Montags, Dienstags, Mittwochs) je 2 Stunden
- **Sprechstunden**
  - C. Kreitz: Mi 9:30–10:30 . . . , und immer wenn die Türe offen ist
  - Tutoren: individuell in Übungsgruppen vereinbaren

Leistungserfassung

- **Eine Klausur entscheidet die Note** Anmeldung!
  - Hauptklausur 20. Februar 2009, 10.00 - 12.00 Uhr – keine Nachklausur
  - Probeklausur 19. Dezember 2008, 11.00 - 13.00 Uhr
- **Zulassung zur Klausur**
  - 50% der Punkte in den Hausaufgaben
    - Gruppen bis 4 Studenten dürfen gemeinsame Lösungen abgeben
    - Gruppen dürfen sich nur nach Rücksprache mit mir ändern
  - Probeklausur zählt wie ein Hausaufgabenblatt
  - Punkte aus Quiz werden ebenfalls gezählt
- **Vorbereitung auf die Klausur**
  - Kurzquiz in jeder Übungsstunde ernsthaft bearbeiten
  - Eigenständige Lösung von Haus- und Übungsaufgaben
  - Feedback durch Korrektur der Hausaufgaben und der Probeklausur
  - Klärung von Fragen in Übung und Sprechstunden

Fangen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung an

Welche Vorkenntnisse sollten Sie mitbringen ?

Eine gute Oberstufenmathematik reicht aus

- **Verständnis mathematischer Konzepte**
  - Elementare Mengentheorie und die Gesetze von $\{x|P(x)\}$, $\cup$, $\cap$
  - Bezug zwischen Mengen, Relationen und Funktionen
  - Datenstrukturen wie Listen, Wörter, Graphen, Bäume ...
  - Elementare Gesetze der Algebra und Logik
  - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung
  - Zusammenhang zwischen formaler und informaler Beschreibung

  Nötiges Vokabular wird bei Bedarf kurz vorgestellt/wiederholt/eingeübt

- **Verständnis mathematischer Beweismethoden**

  Informatiker müssen Korrektheit von Programmen beweisen können
  - Deduktive Beweise für Analyse von Befehlssequenzen
  - Induktionsbeweise für Analyse von Rekursion / Schleifen
  - Widerlegungsbeweise und Gegenbeispiele für Unmöglichkeitsaussagen

Was ist eigentlich ein Beweis?

"Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt"

- Genau genug, um Details rekonstruieren zu können

  Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein

  Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Text muß lesbar und klar verständlich sein und präzise Sprache verwenden

  Formeln und Textfragmente ohne erkennbaren Sinn aneinanderzureihen ist unakzeptabel

  Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, dass Sie nichts mehr falsch machen können

  ... es reicht nicht, dass Sie es einmal richtig gemacht haben

---

- Tip: ausführliche Lösungen entwickeln, bis Sie genug Erfahrung haben.

  Bei Präsentation für Andere zentrale Gedanken aus Lösung extrahieren
- Test: verstehen Ihre Kommilitonen Ihre Lösung und warum sie funktioniert?

Mehr dazu in den Übungen und im Anhang

Nutzen Sie Ihre Chancen!

- **Theorie ist bedeutender als viele glauben**
  - Ist Theorie langweilig? überflüssig? unverständlich? ... eine Plage?
  - Alle großen Softwareprojekte benutzten theoretische Modelle
  - Ohne theoretische Kenntnisse begehen Sie viele elementare Fehler
  - Theorie kann durchaus sehr interessant sein
- **Es geht um mehr als nur bestehen**
  - Das wichtige ist Verstehen
  - Sie können jetzt umsonst lernen, was später teure Lehrgänge benötigt
  - Wann kommen Sie je wieder mit den Besten des Gebietes in Kontakt?
- **Die Türe steht offen**
  - Lernfrust und mangelnder Durchblick sind normal aber heilbar
  - Kommen Sie in die Sprechstunden und stellen Sie Fragen

Vertrauen ist ein kostbares Gut

... missbrauchen Sie es nicht

- **Abschreiben fremder Lösungen bringt nichts**
  - Sie lernen nichts dabei – weder Inhalt noch Durchhaltevermögen
  - Sie erkennen Ihre Lücken nicht und nehmen Hilfe zu spät wahr
  - Sie werden nie ein echtes Erfolgserlebnis haben
  - Es schadet Ihrer persönlichen Entwicklung
- **Wir vertrauen Ihrer Ehrlichkeit**
  - Benutzen Sie externe Ideen (Bücher/Internet) nur mit Quellenangabe
  - Benutzen Sie keine Lösungen von Kommilitonen
  - Geben Sie keine Lösungen an Kommilitonen weiter

  Klausurlösungen sollten ausschließlich Ihre eigenen sein

  Keine "Überwachung", aber wenn es dennoch auffliegt ...
- **Mehr zur Arbeitsethik auf unseren Webseiten**

ANHANG

Theoretische Informatik I

Lektion 1

Mathematische Methodik

1. Wichtige Grundbegriffe
2. Problemlösen
3. Beweistechniken

Mathematisches Vokabular I: Wörter und Sprachen

- **Alphabet Σ**: endliche Menge von Symbolen,
  z.B. $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{0, .., 9\}$, $\Sigma = \{A, .., Z, a, .., z, \ , ?, !, ..\}$
- **Wörter**: endliche Folge w von Symbolen eines Alphabets
  Auch Zeichenreihen oder Strings genannt
- ϵ: Leeres Wort (ohne jedes Symbol)
- $w\ v$: Konkatenation (Aneinanderhängung) der Wörter w und v
- u^i: i-fache Konkatenation des Wortes (oder Symbols) u
- $|w|$: Länge des Wortes w (Anzahl der Symbole)
- $v \sqsubseteq w$: v Präfix von w, wenn $w = v\,u$ für ein Wort u
- Σ^k: Menge der Wörter der Länge k mit Symbolen aus Σ
- Σ^*: Menge aller Wörter über Σ
- Σ^+: Menge aller nichtleeren Wörter über Σ
- **Sprache L**: Beliebige Menge von Wörtern über einem Alphabet Σ
  Üblicherweise in abstrakter Mengennotation gegeben
  z.B. $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| \text{ ist gerade}\}$ $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- **Problem P**: Menge von Wörtern über einem Alphabet Σ
  Das "Problem" ist, Zugehörigkeit zur Menge P zu testen

Mathematisches Vokabular II: Funktionen

- **Funktion $f : S \to S'$**: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S'
  nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert
- **Domain von f**: $domain(f) = \{x \in S \mid f(x) \text{ definiert}\}$ (Definitionsbereich)
- **Range von f**: $range(f) = \{y \in S' \mid \exists x \in S.\ f(x) = y\}$ (Wertebereich)
- **f total**: $domain(f) = S$ (andernfalls ist **f partiell**)
- **f injektiv**: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- **f surjektiv**: $range(f) = S'$
- **f bijektiv**: f injektiv und surjektiv
- **Umkehrfunktion $f^{-1}: S' \to S$**: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ (f injektiv!)
- **Urbild $f^{-1}(L)$**: Die Menge $\{x \in S \mid f(x) \in L\}$
- **Charakteristische Funktion χ_L von $L \subseteq S$**: $\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- **Partiell-charakteristische Funktion ψ_L**: $\psi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

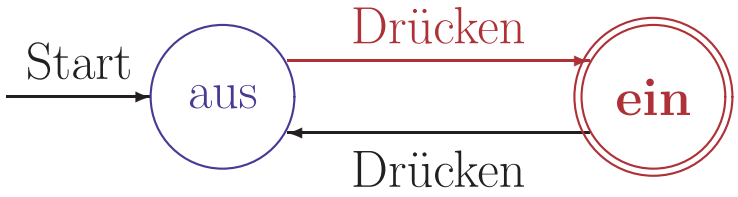
Mehr Vokabular wird bei Bedarf vorgestellt

Methodik des Problemlösens

- **Klärung der Voraussetzungen**
  - Welche Begriffe sind zum Verständnis des Problems erforderlich?
  - Erstellung eines präzisen Modells: abstrahiere von Details
  - Formulierung des Problems im Modell: was genau ist zu tun?
- **Lösungsweg konkretisieren**
  - Welche Einzelschritte benötigt man, um das Problem zu lösen?
  - Welches Gesamtergebnis ergibt sich aus den Einzelschritten?
  - Wie beweist man die Korrektheit des Gesamtergebnisses?
- **Lösung zusammenfassen**
  - Kurz und prägnant: Argumente auf das Wesentliche beschränken
  - Umgangssprache durch mathematisch präzise Formulierungen ersetzen

Modelle für Berechnung und Sprachen

- **Automaten: Abarbeitung von Eingaben**
  - z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von "Drück"-Eingaben



  - 2 Zustände: aus, ein – 1 Startzustand: aus
  - 1 Eingabesymbol: Drücken
  - 1 Endzustand: ein — wird erreicht bei ungerader Anzahl von Drücken
- **Grammatiken: Vorschriften für Spracherzeugung**
  - z.B.: $S \to$ Drücken, $S \to S$DrückenDrücken
  - Erzeugt nur ungerade Anzahl von Drücken-Symbolen
- **Reguläre Ausdrücke: algebraische Strukturen**
  - z.B.: (DrückenDrücken)*Drücken

Formale Beweise in der Informatik

- **Testen von Programmen ist unzureichend**
  - Nur hilfreich zur Entdeckung grober Fehler
  - Viele kleine, aber gravierende Fehler fallen durch das Testraster
    - Pentium Bug (1994), Ariane 5 (1996), Mars Polar Lander (1999), ...
- **Kritische Programme muss man "beweisen"**
  - Erfolgreicher Beweis zeigt genau, wie das Programm arbeitet
  - Erfolgloser Beweisversuch deutet auf mögliche Fehler im Programm
  - Jeder Informatiker sollte die eigenen Programme beweisen
- **Jeder Informatiker muss Beweise verstehen**
  - Deduktive Beweise für sequentielle Verarbeitung
  - Induktionsbeweise für Rekursion / Schleifen
  - Widerlegungsbeweise und Gegenbeispiele für Unmöglichkeitsaussagen

Wie führt man stichhaltige Beweise?

Behauptungen: Ausgangspunkt jedes Beweises

- **Wenn–Dann Aussagen:**
  - Eine Konklusion folgt aus einer oder mehreren Hypothesen (Annahmen)
  - z.B. "*Wenn* $\boldsymbol{x \geq 4}$, *dann* $\boldsymbol{2^x \geq x^2}$"
  - Auch: H *impliziert* K, *aus* H *folgt* K, K *wenn* H, $H \Rightarrow K$
  - Achtung: wenn K gilt, muss H nicht der Grund sein

  Fast alle Behauptungen haben diese Form
  - Hypothesen sind zuweilen implizit oder ergeben sich aus dem Kontext
  - z.B. "$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$" hat implizite Hypothese "θ *ist ein Winkel*"

- **Genau dann, wenn Aussagen**
  - Aussagen A und B sind äquivalent ($A \Leftrightarrow B$, $A \equiv B$, A *iff* B (engl.))
  - z.B. "$x^2 = 1$ *genau dann, wenn* $x = 1$"
  - Gleichwertig mit $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$

Wichtige Beweismethoden

Zeige, daß Behauptung B aus Annahmen A folgt

- **Deduktiver Beweis:**
  - Aneinanderkettung von Argumenten / Aussagen $A_1, A_2, ..., A_n = B$
  - Zwischenaussagen A_i müssen schlüssig aus dem Vorhergehenden folgen
  - Verwendet werden dürfen nur Annahmen aus A, mathematische Grundgesetze, bereits bewiesene Aussagen und logische Schlußfolgerungen

  Beispiel: *"Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade"*

	Aussage	Begründung
1.	$a = 2x + 1$	Gegeben (Auflösung des Begriffs "ungerade")
2.	$b = 2y + 1$	Gegeben (Auflösung des Begriffs "ungerade")
3.	$a + b = 2(x + y + 1)$	(1,2) und Gesetze der Arithmetik

- **Beweis durch Kontraposition**
  - Beweise, daß nicht A aus der Annahme nicht B folgt
  - $\neg B \Rightarrow \neg A$ ist aussagenlogisch äquivalent zu $A \Rightarrow B$
- **Indirekte Beweisführung**
  - Aus A und nicht B folgt ein Widerspruch (äquivalent zu $A \Rightarrow B$)

Wichtige Beweismethoden (II)

- **Widerlegungsbeweise: Zeige, daß A nicht gilt**
  - Widerspruchsbeweis: Zeige, daß aus Annahme A ein Widerspruch folgt
  - Gegenbeispiele beweisen, daß A nicht allgemeingültig ist
- **Induktionsbeweise: Zeige, daß A für alle x gilt**

  Standardinduktion (auf natürlichen Zahlen):

  Gilt A für i und folgt A für $n{+}1$, wenn A für n gilt, so gilt A für alle $n{\geq}i$

  Vollständige Induktion:

  Folgt A für n, wenn A für alle $j{<}n$ mit $j{\geq}i$ gilt, dann gilt A für alle $n{\geq}i$

  Strukturelle Induktion (auf Datentypen wie Listen, Bäumen, Wörtern):

  Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

  Gegenseitige oder simultane Induktion

  Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen gleichzeitig in einer Induktion

Mehr dazu im Anhang

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

- **Informaler Beweis**
  - Es sei x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen
  - Das Quadrat jeder positiven ganzen Zahl ist mindestens 1
  - Aus der Annahme folgt damit, dass $x \geq 4$ sein muss
  - Wir benutzen den Satz "*Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$" HMU Satz 1.3, Folie 18 und schließen daraus, dass $2^x \geq x^2$ gilt
- **Beweis in schematischer Darstellung**

	Aussage	Begründung
1.	$x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$	Gegeben
2.	$a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$	Gegeben
3.	$a^2 \geq 1, b^2 \geq 1, c^2 \geq 1, d^2 \geq 1$	(2) und Gesetze der Arithmetik
4.	$x \geq 4$	(1), (3) und Gesetze der Arithmetik
5.	$2^x \geq x^2$	(4) und HMU Satz 1.3, Folie 18

Deduktive Beweisführung

Logische Schritte von Annahmen zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit Menge der Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt

- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**
  - Logischer Schluss: Sind A und $A \Rightarrow B$ bekannt, kann B gefolgert werden
  - Bekannte mathematische Grundgesetze, z.B. aus der Arithmetik
  - Bereits bewiesene Sätze
  - Auflösung von Definitionen
  - Extensionalität von Mengen: $M{=}M' \;\Leftrightarrow\; M{\subseteq}M' \wedge M'{\subseteq}M$

    $M{\subseteq}M' \;\Leftrightarrow\; (\forall x)\, x \in M \;\Rightarrow\; x \in M'$
  - Gleichheit von Zahlen: $x{=}y \;\Leftrightarrow\;$ weder $x{<}y$ noch $x{>}y$

Beispiel für Auflösung von Definitionen

Wenn S endliche Teilmenge einer Menge U ist und das Komplement von S bezüglich U endlich ist, dann ist U endlich

- **Definitionen**

  S endlich $\equiv$ Es gibt eine ganze Zahl n mit $||S|| = n$

  T Komplement von S $\equiv$ $T \cup S = U$ und $T \cap S = \emptyset$

- **Beweis**

	Aussage	Begründung
1.	S endlich	Gegeben
2.	T Komplement von S	Gegeben
3.	T endlich	Gegeben
4.	$\|\|S\|\| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$	Auflösen der Definition in (1)
5.	$\|\|T\|\| = m$ für ein $m \in \mathbb{N}$	Auflösen der Definition in (3)
6.	$T \cup S = U$	Auflösen der Definition in (2)
7.	$T \cap S = \emptyset$	Auflösen der Definition in (2)
8.	$\|\|U\|\| = m + n$ für $n, m \in \mathbb{N}$	(4),(5),(6), (7) und Gesetze der Kardinalität
9.	U endlich	Einsetzen der Definition in (8)

Beweis einer Mengenäquivalenz

Für beliebige Mengen R und S gilt $R \cup S = S \cup R$

- **Definitionen**

  $x \in R \cup S \quad \equiv \quad x \in R$ oder $x \in S$

- **Zu zeigen:**
  - $R \cup S = S \cup R$ also
  - $R \cup S \subseteq S \cup R$ und $S \cup R \subseteq R \cup S$ also
  - *Wenn* $x \in R \cup S$, *dann* $x \in S \cup R$ und *wenn* $x \in S \cup R$, *dann* $x \in R \cup S$

- **Beweis der ersten Implikation**

	Aussage	Begründung
1.	$x \in R \cup S$	Gegeben
2.	$x \in R$ oder $x \in S$	Auflösen der Definition in (1)
3.	$x \in S$ oder $x \in R$	Logische Umstellung von (2)
4.	$x \in S \cup R$	Einsetzen der Definition in (3)

Beweis der zweiten Implikation genauso

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, dass Sie nichts mehr falsch machen können
  ... es reicht nicht, dass Sie es einmal richtig gemacht haben

---

- Tip: ausführliche Lösungen entwickeln, bis Sie genug Erfahrung haben.
  Bei Präsentation für Andere zentrale Gedanken aus Lösung extrahieren
- Test: verstehen Ihre Kommilitonen Ihre Lösung und warum sie funktioniert?

Widerlegungsbeweise I

Zeige, dass eine Aussage A nicht gilt

- **Beweis durch Widerspruch**
  - A gilt nicht, wenn aus der Annahme von A ein Widerspruch folgt
  - z.B. *Wenn S endliche Teilmenge einer unendlichen Menge U ist, dann ist das Komplement von S (bezüglich U) nicht endlich*
  - Beweis

	Aussage	Begründung
1.	S endlich	Gegeben
2.	T Komplement von S	Gegeben
3.	U unendlich	Gegeben
4.	T endlich	Annahme
5.	U endlich	(1), (4) mit Satz auf Folie 11
6.	Widerspruch	(3), (5)
7.	T nicht endlich	Annahme (4) muss falsch sein

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Statt *wenn H, dann K* zeige *wenn nicht K, dann nicht H*
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent
- **Spezielle Anwendung: Indirekte Beweisführung**
  - Zeige, dass aus *H und nicht K* ein Widerspruch folgt
    Aussagenlogisch äquivalent zu *wenn H, dann K*
  - z.B. *Wenn für eine natürliche Zahl x gilt $x^2>1$, dann ist $x\geq 2$*
  - Beweis: *Sei $x^2>1$. Wenn $x\geq 2$ nicht gilt, dann ist $x=1$ oder $x=0$.*
    Wegen $1^2=1$ und $0^2=0$ ist $x^2>1$ in beiden Fällen falsch.
    Also muss $x\geq 2$ sein

Diagonalisierungsbeweise

Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

- **Terminierung von Programmen ist unentscheidbar**

  Es gibt kein Programm, das testen kann, ob ein beliebiges Programm bei einer bestimmten Eingabe überhaupt anhält

- **Beweis stützt sich auf wenige Grundannahmen**

  1. Programme und ihre Daten sind als Zahlen codierbar
  2. Computer sind universelle Maschinen
     - Bei Eingabe von Programm und Daten berechnen sie das Ergebnis
     - Schreibweise: $p_i(j) \hat{=}$ Anwendung des i-ten Programms auf die Zahl j
  3. Man kann Programme beliebig zu neuen Programmen zusammensetzen

     ... und die Nummer des neuen Programms berechnen

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**
  - $\texttt{Term}(i,j)=1$ falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)
- **Konstruiere ein neues Programm**
  $\texttt{Unsinn}$ **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	...
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
p_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\perp \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

- $\texttt{Unsinn}$ **ist ein Programm**
  Also muss $\texttt{Unsinn}$ **eine Nummer** k **haben**
- **Was macht** $p_k=\texttt{Unsinn}$ **auf seiner eigenen Nummer?**
  - Wenn $p_k(k)$ hält, dann $\texttt{Term}(k,k)=1$, also hält $\texttt{Unsinn}(k)$ nicht an ???
  - Wenn $p_k(k)$ nicht hält, dann $\texttt{Term}(k,k)=0$, also hält $\texttt{Unsinn}(k)$ an ???
- **Dies ist ein Widerspruch,**
  Also kann es den Test auf Terminierung nicht geben

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  - Gilt A für i und folgt A für $n{+}1$, wenn A für n gilt, dann gilt A für alle $n{\geq}i$
  - z.B. *Wenn* $x{\geq}4$, *dann* $2^x{\geq}x^2$

    Induktionsanfang $x{=}4$: Es ist $2^x = 16 \geq 16 = x^2$

    Induktionsschritt: Es gelte $2^n{\geq}n^2$ für ein beliebiges $n{\geq}4$

    Dann ist $2^{n+1} = 2{*}2^n \geq 2n^2$ aufgrund der Induktionsannahme

    und $(n{+}1)^2 = n^2{+}2n{+}1 = n(n{+}2{+}1/n) \leq n(n{+}n) = 2n^2$ wegen $n{\geq}4$

    also gilt $2^{n+1} \geq (n{+}1)^2$

- **Vollständige Induktion**
  - Folgt A für n, wenn A für alle $j{<}n$ mit $j{\geq}i$ gilt, dann gilt A für alle $n{\geq}i$
  - Mächtiger, da man nicht den unmittelbaren Vorgänger benutzen muss

Strukturelle Induktion

Zeige A für alle Elemente eines rekursiven Datentyps

Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

– z.B. *Die Summe einer Liste L von positiven ganzen Zahlen ist mindestens so groß wie ihre Länge*

Induktionsanfang L ist leer: Die Summe und die Länge von L sind 0

Induktionsschritt: Es gelte $sum(L) \geq |L|$

Betrachte die Liste $L \circ x$, die durch Anhängen von x and L entsteht

Dann gilt $sum(L \circ x) = sum(L) + x \geq sum(L) + 1 \geq |L| + 1 = |L \circ x|$

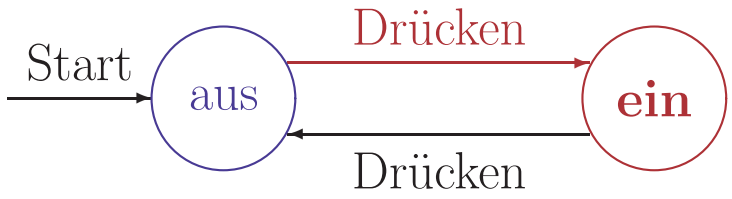
Häufig eingesetzt für Analyse von

- **Baumstrukturen** (Suchen, Sortieren, ...)
- **Syntaktische Strukturen** (Formeln, Programmiersprachen, ...)

⋮

Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

$S_1(n)$: Ist n gerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken ausgeschaltet

$S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken eingeschaltet

Induktionsanfang $n{=}0$: n ist gerade also gilt $S_2(0)$
der Automat ist ausgeschaltet, also gilt $S_1(0)$

Induktionsschritt: Es gelte $S_1(n)$ und $S_2(n)$. Betrachte $n{+}1$

– Falls $n{+}1$ ungerade, dann gilt $S_1(n{+}1)$ und n ist gerade.
  Wegen $S_1(n)$ war der Automat "aus" und wechselt auf "ein". Es gilt $S_2(n{+}1)$

– Falls $n{+}1$ gerade, dann gilt $S_2(n{+}1)$ und n ist ungerade.
  Wegen $S_2(n)$ war der Automat "ein" und wechselt auf "aus". Es gilt $S_1(n{+}1)$