Theoretische Informatik II

Einheit 5.2

Rekursive Funktionen

1. Primitiv- und μ-rekursive Funktionen
2. Analyse und Programmierung
3. Äquivalenz zu Turingmaschinen

Berechenbarkeit ohne Maschinen

Welche Arten von Funktionen sind berechenbar?

- **Einfache Funktionen müssen berechenbar sein**
  - Nachfolgerfunktion: von einer Zahl zur nächsten weiterzählen (s)
  - Projektion: aus einer Gruppe von Werten einen herauswählen (pr_k^n)
  - Konstante: unabhängig von der Eingabe eine feste Zahl ausgeben (c_k^n)
- **Berechenbare Funktionen sind zusammensetzbar**
  - Einfache Operationen erzeugen neue berechenbare Funktionen
  - Komposition: Hintereinanderausführen mehrerer Berechnungen
  - Rekursion: Programm ruft sich bei Ausührung selbst auf
  - Suche: nach der ersten Nullstelle einer Funktion
- **Beschreibung benötigt keine Funktionsargumente**
  - Abstrakte Programmiersprache: wende Operationen auf Funktionen an
  - Es reicht, die Grundfunktionen und Operationen zu benennen
  - Mathematischer Kalkül für informatiktypisches ‘Baukastensystem’

Beispiele für Baukastenprogrammierung

- **Addition von 2**
  - Ergebnis entsteht durch zweifache Addition von 1 $\quad$ x+2 = x+1+1
  - Abstrahiert: doppelte Anwendung der Nachfolgerfunktion $\quad$ x+2 = s(s(x))
  - Die Funktion $+_2$ ist also die Komposition von s und s $\quad$ $+_2 \equiv s \circ s$
- **Addition zweier Zahlen x und y**
  - Ergebnis entsteht durch y-fache Addition von 1 $\quad$ x+y = x+$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{y-mal}$
  - Iteration muß rekursiv beschrieben werden
    - Im Basisfall (y=0) ist das Ergebnis x $\quad$ x+0 = x
    - Im Schrittfall verwenden wir die Addition von x und y, um die Addition von x und y+1 zu bestimmen $\quad$ x+(y+1) = (x+y)+1
  - Abstrahiert:
    - Basisfall ergibt sich durch Anwendung der Projektion pr_1^1 auf x
    - Schrittfall ergibt sich durch Anwendung von s auf das "alte" Ergebnis
- **kgV zweier Zahlen x und y**
  - Suche, von Null beginnend, die kleinste Zahl z mit x teilt z und y teilt z

Primitiv-rekursive Funktionen

Funktionen, die aus Grundfunktionen durch Kompositionen und/oder primitive Rekursionen entstehen

- **Grundfunktionen**
  - **Nachfolgerfunktion** $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $s(x) = x+1$
  - **Projektionsfunktionen** $pr^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ $(1 \le k \le n)$ mit $pr^n_k(x_1, .., x_n) = x_k$
  - **Konstantenfunktion** $c^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ $(0 \le n)$ mit $c^n_k(x_1, .., x_n) = k$
- **Operationen auf Funktionen**
  - **Komposition** $f \circ (g_1, .., g_n) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ $(g_1, .., g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N},\ f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N})$

    Für $h = f \circ (g_1, .., g_n)$ gilt $h(x) = f(\, g_1(x), .., g_n(x)\,)$
  - **Primitive Rekursion** $Pr[f, g] : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ $(f : \mathbb{N}^{k-1} \to \mathbb{N},\ g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N})$

    Für $h = Pr[f, g]$ gilt $h(x, 0) = f(x)$,

    und $h(x, y+1) = g(x, y,\ h(x, y))$

    In Programmierschreibweise: $h(x, y)$ = if y=0 then $f(x)$ else $g(x, y-1, h(x, y-1)\,)$

Programmierung der rekursiven Operationen

- **Komposition $\hat{=}$ Folge von Anweisungen**

(Berechne $h(x_1, .., x_k)$ für $h = f \circ (g_1, .., g_n)$)

```
y_1 := g_1 (x_1, .., x_k);
    ⋮
y_n := g_n (x_1, .., x_k);
h   := f (y_1, .., y_n)
```

(Das Resultat h entspricht $h(x_1, .., x_k)$)

- **Primitive Rekursion $\hat{=}$ umgekehrte Zählschleife**

(Berechne $h(x_1, .., x_k, y)$ für $h = Pr[f, g]$)

```
h := f (x_1, .., x_k);
for i:=1 to y do h:=g (x_1, .., x_k, i-1, h) od
```

(Resultat $h \hat{=} h(x_1, .., x_k, y)$)

Analyse einer primitiven Rekursion

- $\boldsymbol{f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]}$ **Was macht f_1?**
- **Stelligkeitsanalyse:**

  $pr_1^1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $pr_3^3 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $s \circ pr_3^3 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ $\mapsto$ $\boldsymbol{f_1} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

  Beispiel: $\boldsymbol{f_1(2,2)} = 4$

  – Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen

  – Direkte Auswertung von Argumenten bei Grundfunktionen
- **Analyse des rekursiven Verhaltens:**

  – $f_1(x,0) = pr_1^1(x) = x$

  – $f_1(x,y+1) = (s \circ pr_3^3)(x,y,f_1(x,y)) = s(f_1(x,y)) = f_1(x,y)+1$

  Das ist die Rekursionsgleichung der Addition

  $$\left.\begin{array}{l} x+0 = x \\ x+(y+1) = (x+y)+1 \end{array}\right\} \mapsto \boldsymbol{f_1 = add} \text{ mit } add(n,m) = n+m$$

Programmierung mit primitiver Rekursion

Konstruiere primitiv-rekursives Programm für Vorgängerfunktion p

- **$p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ist definiert durch** $\qquad p(n) = n \dot{-} 1$
- **Analysiere rekursives Verhalten der Funktion**
  - $p(0) \quad = 0 \dot{-} 1 = 0$ (Subtraktion liefert niemals weniger als 0!!)
  - $p(y{+}1) = (y{+}1) \dot{-} 1 = y$

  In Programmierschreibweise: $p(y)$ `= if` y`=0 then 0 else` $y-1$
- **Beschreibe p im Schema der primitiven Rekursion**
  - Die Programmiersprache "rekursive Funktionen" verlangt, daß das Beschreibungsschema $Pr[f, g]$ eingehalten wird
  - Benötigt: $f{:}\mathbb{N}^0 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $p(0) \quad = f() = 0 \qquad \mapsto f = c_0^0$

    und $g{:}\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $p(y{+}1) = g(y, p(y)) = y \qquad \mapsto g = pr_1^2$

Abstraktes Programm ist $\qquad p = Pr[c_0^0, pr_1^2]$

Programmierung primitiv-rekursiver Funktionen

- **Subtraktion** $\boldsymbol{sub}: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ $\qquad sub(n,m) = n \dot{-} m$
  - $sub(x,0) = x = pr_1^1(x)$
  - $sub(x,y{+}1) = x \dot{-} (y{+}1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1 = p(x \dot{-} y) = (p \circ pr_3^3)(x,y,sub(x,y))$

  Abstraktes Programm: $\boldsymbol{sub = Pr[pr_1^1, p \circ pr_3^3]}$

- **Multiplikation** $\boldsymbol{mul}: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ $\qquad mul(n,m) = n * m$
  - $mul(x,0) = 0 = c_0^1(x)$
  - $mul(x,y{+}1) = mul(x,y){+}x = (add \circ (pr_1^3, pr_3^3))(x,y,mul(x,y))$

  $\boldsymbol{mul = Pr[c_0^1, (add \circ (pr_1^3, pr_3^3))]}$

- **Exponentiierung** $\boldsymbol{exp}: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ $\qquad exp(n,m) = n^m$

  $\boldsymbol{exp = Pr[c_1^1, (mul \circ (pr_1^3, pr_3^3))]}$

- **Fakultät** $\boldsymbol{fak}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\qquad fak(n) = n! = 1*2*...*n$

  $\boldsymbol{fak = Pr[c_1^0, (mul \circ (s \circ pr_1^2, pr_2^2))]}$

- **Vorzeichen-Funktion** $\boldsymbol{sign}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\qquad sign(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

  $\boldsymbol{sign = Pr[c_0^0, c_1^2]}$

Primitiv-rekursive Programmierschemata

- **Programmierung durch Fallunterscheidung**

Sei $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } t(x) = 0 \\ g(x) & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad (f, g, t\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N})$

h ist primitiv rekursiv, wenn f, g und t primitiv rekursiv sind

Beweis: wende Vorzeichenfunktion auf $t(x)$ an, multipliziere mit f und g

$$h(x) = (1 \dot{-} sign(t(x))) * f(x) + sign(t(x)) * g(x)$$

Programmschema: $h = add \circ (mul \circ (sub \circ (c_1^k, sign \circ t), f), mul \circ (sign \circ t, g))$

- **Generelle Summe / Produkt: $\Sigma_{i=0}^{r} f(x,i)$ / $\Pi_{i=0}^{r} f(x,i)$**

primitiv rekursiv, wenn dies für f gilt $\quad (f\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N})$

Beweis: es gilt $\sum_{i=0}^{0} f(x,i) = f(x,0)$

und $\sum_{i=0}^{y+1} f(x,i) = (\sum_{i=0}^{y} f(x,i)) + f(x, y+1)$

Also $\Sigma f = Pr[f \circ (pr_1^1, c_0^1),\ add \circ (pr_3^3, f \circ (pr_1^3, s \circ pr_2^3))]$ (für k=1)

$\Pi f = Pr[f \circ (pr_1^1, c_0^1),\ mul \circ (pr_3^3, f \circ (pr_1^3, s \circ pr_2^3))]$ (Lösung für $k>1$ analog)

Primitiv-rekursive Programmierschemata

- **Programmierung durch beschränkte Suche (Minimierung)**

Sei $h(x) = \boldsymbol{Mn_g[f]} := \begin{cases} min\{y{\leq}g(x) \mid f(x,y){=}0\} & \text{falls dies existiert} \\ g(x){+}1 & \text{sonst} \end{cases}$

$(f\colon \mathbb{N}^{k+1}{\to}\mathbb{N},\ g\colon \mathbb{N}^k{\to}\mathbb{N})$

h ist primitiv rekursiv, wenn f und g primitiv rekursiv sind

Beweis: definiere h' durch $h'(x,t) = \begin{cases} min\{y{\leq}t \mid f(x,y){=}0\} & \text{falls dies existiert} \\ t{+}1 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann ist $h'(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } f(x,0)=0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} = sign(f(x,0))$

und $h'(x,t{+}1) = \begin{cases} h'(x,t) & \text{falls } h'(x,t){\leq}t \\ t{+}1 & \text{falls } h'(x,t)=t{+}1 \text{ und } f(x,t{+}1)=0 \\ t{+}2 & \text{sonst} \end{cases}$

Damit ist h' aus primitiv rekursiven Funktionen mit Fallunterscheidung und primitiver Rekursion konstruierbar und somit selbst primitiv rekursiv. Wegen $h(x) = h'(x, g(x))$ folgt hieraus, daß auch h primitiv rekursiv ist

- **Beschränkte Maximierung $\boldsymbol{Max_g[f]}$ analog**

Weitere Beispiele primitiv-rekursiver Funktionen

- **Absolute Differenz:** $\boldsymbol{absdiff} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\qquad absdiff(n,m) = |n-m|$
- **Maximum:** $\boldsymbol{max} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\qquad max(n,m) = \begin{cases} n & \text{falls } n \geq m \\ m & \text{sonst} \end{cases}$
- **Minimum:** $\boldsymbol{min} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\qquad min(n,m) = \begin{cases} m & \text{falls } n \geq m \\ n & \text{sonst} \end{cases}$
- **Division:** $\boldsymbol{div} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\qquad div(n,m) = n \div m$
- **Divisionsrest:** $\boldsymbol{mod} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\qquad mod(n,m) = n \bmod m$
- **Quadratwurzel:** $\boldsymbol{sqrt} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad sqrt(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$
- **Logarithmus:** $\boldsymbol{ld} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad ld(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$
- **Größter gemeinsamer Teiler:** $\boldsymbol{ggT} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
- **Kleinstes gemeinsames Vielfaches:** $\boldsymbol{kgV} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

Beweise in Übungen selbst durchführen !

Berechnungen auf Zahlenpaaren und -listen

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
5	20						...
4	14	19					...
3	9	13	18				...
2	5	8	12	17			...
1	2	4	7	11	16		...
0	0	1	3	6	10	15	...
y/x	0	1	2	3	4	5	...

$$\langle x, y\rangle := (\Sigma_{i=1}^{x+y} i) + y$$
$$=$$
$$(x+y)(x+y+1) \div 2 + y$$

"Standard-Tupelfunktion"

- $\langle\rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ **ist primitiv-rekursiv und bijektiv**
- **Die Umkehrfunktionen** $\pi_i^2 := pr_i^2 \circ \langle\rangle^{-1}$ **sind primitiv-rekursiv**
- $\langle\rangle$ **kann iterativ auf** $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ **und auf** $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ **fortgesetzt werden**
  - $\langle x, y, z\rangle^3 = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle, \ldots,\quad \langle x_1 \ldots x_k\rangle^* = \langle k, \langle x_1, .., x_k\rangle^k\rangle$
  - Alle Funktionen sind bijektiv und primitiv-rekursiv
  - Alle Umkehrfunktionen π_i^k und π_i^* sind primitiv-rekursiv

Jede Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ **kann einstellig simuliert werden**

- Wähle $g := f \circ (\pi_1^2, \pi_2^2)$, dann gilt $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g(\langle x, y\rangle) = f(x, y)$

Reichen primitiv-rekursive Funktionen aus?

- **Definiere "Ackermann-"Funktionen A_n iterativ**

$$A_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x=0 \\ 2 & \text{falls } x=1 \\ x+2 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \begin{aligned} A_{n+1}(0) &:= 1 \\ A_{n+1}(x+1) &:= A_n(A_{n+1}(x)) \end{aligned}$$

Jede einzelne der Funktionen A_n ist primitiv-rekursiv

- **Das Wachstumsverhalten der A_n steigt mit n**

$A_1(x) = 2x \quad (x \geq 1)$

$A_2(x) = 2^x$

$A_3(x) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\cdots^2})})}}_{x-mal}$

$A_4(0) = 1$

$A_4(1) = 2$

$A_4(2) = 2^2 = 4$

$A_4(3) = 2^{2^{2^2}} = 65536$

$A_4(4) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\cdots^2})})}}_{65536-mal}$

$A_4(5) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\cdots^2})})}}_{A_4(4)-mal}$

- **Definiere $A(x) := A_x(x)$** (**Große Ackermann-Funktion**)
  - A wächst extrem stark, ist aber **total** (auf jeder Eingabe definiert)
  - A ist intuitiv berechenbar **kann aber nicht primitiv-rekursiv sein**

Warum kann A nicht primitiv-rekursiv sein ?

- **Betrachte Schachtelungstiefe einer Funktion**

  Anzahl der ineinander verschachtelten Rekursionen

  – Funktionen ohne primitive Rekursion $\mapsto$ Tiefe 0

  – Komposition mit Funktionen der Tiefe n $\mapsto$ Tiefe n

  – Primitive Rekursion mit Funktionen der Tiefe n $\mapsto$ Tiefe $n{+}1$

  Jede primitiv-rekursive Funktion hat eine begrenzte Schachtelungstiefe

- **Beispiele**

  – Tiefe 1: Addition add, Vorgänger p, Signum $sign$

  – Tiefe 2: Multiplikation mul, Subtraktion sub

  – Tiefe 3: Exponentiation exp, Fakultät fak

- **Die Schachtelungstiefe von A ist unbegrenzbar**

  – Die Berechnung von $A(x)$ benötigt Schachtelungstiefe x

  – **A kann nicht primitiv-rekursiv sein**

  Präzises formales Argument ist sehr aufwendig (mögliches Projektthema)

Wie kann man die Ackermannfunktion berechnen?

- **Intuitiver Berechnungsmechanismus einfach**
  - Schrittweise Abarbeitung der Rekursion
  - Verarbeitung von Rekursionsstacks fest in Compilern verankert
- ***A* ist in im Stil rekursiver Funktionen programmierbar**

  (mögliches Projektthema)
  - Beschreibe Abarbeitungsfunktion δ eines Berechnungsstacks für A unter Verwendung der Standardtupelfunktion auf Listen über $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\delta\langle wx0\rangle^* &= \langle w1\rangle^* && A_n(x) = 1\\
\delta\langle w01\rangle^* &= \langle w2\rangle^* && A_0(x) = 2\\
\delta\langle w0(y{+}2)\rangle^* &= \langle w(y{+}4)\rangle^* && A_0(x{+}2) = x{+}4\\
\delta\langle w(x{+}1)(y{+}1)\rangle^* &= \langle wx(x{+}1)y\rangle^* && A_{n+1}(x{+}1) = A_n(A_{n+1}(x))
\end{aligned}$$

  - δ ist primitiv-rekursiv (Beschreibung des Programms aufwendig)

    und $A(x) = \delta^k\langle xx\rangle^*$, wobei k die kleinste Zahl ist mit $\pi_1^2(\delta^j\langle xx\rangle^*){=}1$, d.h. der Stack $\delta^k\langle xx\rangle^*$ enthält nur eine Zahl – das Ergebnis
  - Berechnung terminiert, da in jedem δ-Schritt entweder die erste bearbeitete Zahl im Stack oder die Anzahl der Zahlen kleiner wird

Erweiterung primitiv-rekursiver Funktionen

- **Ackermann Funktion ist mit Suche programmierbar**
  - Suche das kleinste k, für das die Eigenschaft $\pi_1^2(\delta^j\langle xx\rangle^*)=1$ gilt
  - Minimierung wie $Mn_g[f]$, aber ohne Obergrenze g für Suchschritte

- **Zusätzliche Operation Minimierung** $\mu f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ $(f{:}\mathbb{N}^{k+1}\to\mathbb{N})$

  Für $h = \mu f$ gilt $h(x) = \begin{cases} min\{y \mid f(x,y)=0\} & \text{falls dies existiert und alle } f(x,i) \text{ für } i<y \text{ definiert sind} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

  Kurzschreibweise auch: $\boldsymbol{h(x) = \mu_z[f(x,z)=0]}$ "μ-Operator"

  - Funktionen die aus den Grundfunktionen durch Komposition, primitive Rekursion oder Minimierung entstehen, heißen **(μ-)rekursiv**

- **Minimierung $\hat{=}$ Suche mit While-schleife**

  (Berechne $h(x_1,..,x_k)$ für $h = \mu f$)

  `y := 0;`

  `while` f`(x`$_1$`,..,x`$_k$`,y)`$\neq 0$ `do y:=y+1 od;` (unbegrenzte Suche)

  h `:= y` (Resultat `h` $\hat{=}$ $h(x_1,..,x_k)$)

Analyse μ-rekursiver Funktionen

- $\boldsymbol{f_2 = \mu c_1^2}$

$$f_2(x) = \begin{cases} min\{y \mid c_1^2(x,y)=0\} & \text{falls } y \text{ existiert und alle} \\ & c_1^2(x,i), i<y \text{ definiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} min\{y \mid 1 = 0\} & \text{falls dies existiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \perp$$

- $\boldsymbol{f_3 = \mu f_1}$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{f_4 = \mu h}$, wobei $h(x,y) = 0$, falls $x{=}y$, und $h(x,y){=}\perp$, sonst

$$f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

$h(x,y) = 0$ für $x = y$, aber h ist undefiniert für $x{>}0$ und $y{<}x$

Wichtige Klassen rekursiver Funktionen

- **$\mathcal{R}$: Menge der (μ-)rekursiven Funktionen**
  - Grundfunktionen und alle Funktionen, die hieraus durch (mehrfache) Komposition, primitive Rekursion oder Minimierung entstehen
  - μ-rekursive Funktionen können partiell sein (nicht überall definiert)
- **$\mathcal{TR}$: Menge der totalen rekursiven Funktionen**
  - A ist total rekursiv, aber nicht primitiv-rekursiv
- **$\mathcal{PR}$: Menge der primitiv-rekursiven Funktionen**
  - Grundfunktionen und alle Funktionen, die hieraus durch (evtl. mehrfache) Komposition oder primitive Rekursion entstehen
  - Primitiv-rekursive Funktionen sind total (terminieren immer)

Wie mächtig sind rekursive Funktionen?

- **$\mathcal{PR}$ und $\mathcal{TR}$ sind echte Unterklassen von $\mathcal{R}$**
  - Offensichtlich gilt $\mathcal{PR} \subseteq \mathcal{TR} \subseteq \mathcal{R}$
  - Nicht alle rekursiven Funktionen sind total (z.B. $f_3 = \mu\, add$) $\mathcal{TR} \neq \mathcal{R}$
  - A ist total rekursiv, aber sind primitiv-rekursiv $\mathcal{PR} \neq \mathcal{TR}$
- **Rekursive Funktionen sind Turing-berechenbar:** $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$
  - Alle Grundfunktionen sind konventionell programmierbar
  - Komposition, Primitive Rekursion und μ-Operator sind programmierbar
  - Alle Computerprogramme sind auf Turing-Maschinen simulierbar
- **Turing-berechenbare Funktionen sind rekursiv:** $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}$
  - Codiere Konfigurationen (Worttupel) als Zahlentupel
  - Simuliere Konfigurationsübergänge $\vdash$ als primitiv-rekursive Funktionen
  - Beschreibe Terminierung von $\vdash^*$ als Suche nach Endkonfiguration
  - Semantik der Turingmaschine ist Iteration von $\vdash$ bis Terminierung

Konsequenzen der Äquivalenzbeweise

- **In Berechenbarkeitsbeweisen können Turingmaschinen und μ-rekursive Funktionen verwendet werden**
- **Kleene Normalform Theorem:**

  Für jede berechenbare Funktion h kann man primitiv-rekursive Funktionen f und g konstruieren, so daß $h(x) = g(x, \mu f(x))$

  – Betrachte Simulation der TM für h als μ-rekursive Funktion

  – f ist die Funktion, die Terminierung charakterisiert

  – μf berechnet die Anzahl der Schritte bis zur Terminierung

  – g berechnet die Iteration der Konfigurationsübergänge
- **Berechenbare Funktionen können mit einer einzigen unbegrenzten Schleife auskommen**

Rekursive Funktionen im Rückblick

- **Abstrakte Definition von Berechenbarkeit**
  - Kalkül beschreibt Funktionen ohne direkte Benennung der Argumente
  - Bausteine: Grundfunktionen s, pr_k^n, c_k^n und Operatoren $\circ$, Pr, μ
  - Rekursive Funktionen sind Turing-mächtig
- **Primitiv-rekursive Funktionen als wichtige Unterklasse**
  - Abstraktes Programm darf keine Minimierung enthalten
  - Fast alle wichtigen Funktionen sind primitiv-rekursiv
  - Fast alle Programmiertechniken erhalten primitive Rekursivität
  - Es gibt totale berechenbare Funktionen, die nicht primitiv-rekursiv sind
- **Minimierung ist der mächtigste Mechanismus**
  - Oft einfacher und eleganter als Anwendung der primitiven Rekursion
  - Terminierung im Allgemeinfall nicht gesichert
  - Theoretisch braucht jede rekursive Funktion maximal eine Minimierung

Mehr in Lewis & Papadimitriou §4.7 und den auf der Webseite genannten Skripten